Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen und ihre Anwendungen in der Kosmologie

Diplomarbeit
vorgelegt von
Friedrich Wagner
aus
Osnabrück

angefertigt
am Institut für Theoretische Physik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
1994

Die nackte Wahrheit kann
von uns zwar nicht gesehen,
wohl aber erkannt *werden.*

Gerhard Vollmer

Mir ist bis heute kein auch noch so kompliziertes
Problem begegnet, das nicht, richtig betrachtet,
noch komplizierter wurde.

Poul Anderson

Ich bedanke mich bei meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben, und bei Herrn Prof. Dr. Goenner für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die freundliche Betreuung dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Einführung und Notation **2**

1. Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) **3**
1.1 Grundzüge der Riemannschen Geometrie . . . 3
1.2 Die Allgemeine Relativitätstheorie . . . 5
1.3 Killing-Vektoren und Raumzeit-Symmetrien . . . 7

2. Die allgemeinrelativistische Kinetische Theorie **9**
2.1 Die Kinetische Theorie in der ART und die Liouville-Gleichung . . . 9
2.2 Energie-Impuls-Tensor und Bilanzgleichungen . . . 10
2.3 Die kinematischen Eigenschaften einer Kurvenkongruenz . . . 12

3. Das Kosmologische Standardmodell **13**
3.1 Kosmologisches Prinzip und Robertson-Walker-Metrik . . . 13
3.2 Die Zeitentwicklung der Robertson-Walker-Metrik . . . 14
3.3 Die Physik des Urknallmodells . . . 16

I Isotrope Lösungen der Einstein-Liouville-Gleichungen **19**

4. Isotrope Lösungen der Einstein-Liouville-Gleichungen **22**
4.1 Der grundlegende Rahmen . . . 22
4.2 Isotrope Lösungen der Liouville-Gleichung . . . 23
4.3 Lösungen der Feldgleichungen . . . 27

5. Lösungen der Liouville-Gleichung mit äußerem Feld **31**
5.1 Elektromagnetisches Feld . . . 32
5.2 p^a - unabhängiges äußeres Feld . . . 34

6. Lösungen der Feldgleichungen mit äußerem Feld **38**
6.1 Elektromagnetisches Feld . . . 38
6.2 Skalarfeld . . . 39
6.3 Skalarfeld mit Materiekopplung . . . 42
6.4 Brans-Dicke-Theorie . . . 44

II Die Zeitentwicklung der axialsymmetrischen Bianchi I - Metrik **45**

7. Die Metrik **50**
7.1 Die axialsymmetrische Bianchi I - Metrik . . . 50
7.2 Kinematische Eigenschaften der Metrik . . . 51

8. Die Materie **53**
8.1 Lösung der Liouville-Gleichung 53
8.2 Die Temperatur 54
8.3 Der Energie-Impuls-Tensor T^{ab} 57
8.4 Physikalische Eigenschaften von T^{ab} 62

9. Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen **65**
9.1 Die Feldgleichungen 65
9.2 Näherungslösungen für kleine Anisotropie 66
9.3 Das Anfangswertproblem 69
9.4 Konsistenztests und Fehlerabschätzung 70
9.5 Der zeitliche Verlauf für $m = 0$ 72
9.6 Der zeitliche Verlauf für $m \neq 0$ 79

10. Lösung der Brans-Dicke-Feldgleichungen **88**
10.1 Die Feldgleichungen in der Brans-Dicke-Theorie 88
10.2 Exakte Lösungen für die Robertson-Walker-Metrik 89
10.3 Asymptotisches Verhalten und Näherungslösungen 90
10.4 Das Anfangswertproblem 92
10.5 Konsistenztests 93
10.6 Der zeitliche Verlauf für $m = 0$ 94
10.7 Der zeitliche Verlauf für $m \neq 0$ 108

Zusammenfassung und Ausblick **116**

A. Spezielle Kapitel **118**
A.1 Der kovariante Lagrange-Formalismus 118
A.2 Die Brans-Dicke-Theorie 119
A.3 Konsistenz mit den Raumzeit-Symmetrien 120
A.4 Konform äquivalente Metriken 121

B. Die Implementation des numerischen Verfahrens **123**

Einführung und Notation

Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit sind Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen, die Anwendung in der Kosmologie finden können. Der theoretische Rahmen dafür liegt in der Allgemeinen Relativitätstheorie und der allgemeinrelativistischen Kinetischen Theorie. Ihre Grundzüge werden am Anfang der Arbeit erläutert, gefolgt von einer kurzen Darstellung des Kosmologischen Standardmodells.
Neben diesem Grundlagenteil spaltet sich die Arbeit in zwei Teile. Beiden Teilen geht dabei eine Einleitung voraus. Im ersten wird eine Arbeit von Ehlers, Geren und Sachs [8] vorgestellt und ihre mögliche Verallgemeinerung auf äußere Felder untersucht. Die Autoren beweisen darin einen Zusammenhang zwischen Eigenschaften der Verteilungsfunktion, die in der Kinetischen Theorie eine zentrale Rolle spielt, und der Form der Metrik, die mit den Feldgleichungen und der Liouville-Gleichung verträglich ist.
Der zweite Teil behandelt die Zeitentwicklung einer speziellen Metrik, wobei der Energie-Impuls-Tensor mit Hilfe der Kinetischen Theorie gewonnen wird. Neben den Einsteinschen Feldgleichungen werden auch Lösungen der Brans-Dicke-Feldgleichungen untersucht. Für beide Systeme mußte dabei eine numerische Simulation auf dem Computer durchgeführt werden.
Schließlich werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und bewertet. Im Anhang werden einige speziellere Kapitel besprochen und die Implementation des numerischen Verfahrens erläutert.

In dieser Arbeit wurde die untenstehende Notationskonvention gewählt. Ihre Verwendung wird in Abschnitt 1.1 klarer.

- Es werden „geometrische“ Einheiten benutzt, d.h. Gravitationskonstante und Lichtgeschwindigkeit werden gleich 1 gesetzt:

  $$G = c = 1 \, .$$

  Dieses soll auch für die Boltzmann-Konstante gelten:

  $$k_B = 1 \, .$$

- Die Metrik hat die Signatur $(- +++)$. Die Vorzeichenkonventionen für den Riemannschen Krümmungstensor und die Feldgleichungen werden in Abschnitt 1.1 deutlich.

- Lateinische Buchstaben bezeichnen Raumzeit-Indizes von 0 bis 3, griechische bezeichnen räumliche von 1 bis 3.

- Über doppelt auftretende Indizes wird summiert (Einsteinsche Summationskonvention), z.B. $u^a u_a := \sum_{a=0}^{3} u^a u_a$ oder $p^\mu p_\mu := \sum_{\mu=1}^{3} p^\mu p_\mu$.

- Die Symmetrisierung und Antisymmetrisierung eines Tensors wird durch runde bzw. eckige Klammern abgekürzt, z.B. $T_{(ab)} := \frac{1}{2}\left(T_{ab} + T_{ba}\right)$, $T_{[ab]} := \frac{1}{2}\left(T_{ab} - T_{ba}\right)$.

- Partielle Ableitungen werden durch ein Komma abgekürzt, kovariante durch ein Semikolon (siehe Abschnitt 1.1).

1. Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART)

Der Abstand zweier Punkte mit den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ ist normalerweise durch

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

gegeben. Diese Beziehung sagt etwas über die Geometrie des zugrundeliegenden (dreidimensionalen) Raumes aus: Er ist euklidisch.
Wie sich herausgestellt hat, besitzt die Spezielle Relativitätstheorie eine besonders einfache Struktur, wenn man den vierdimensionalen Minkowski-Raum zugrunde legt, der durch

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

gekennzeichnet ist. Dabei steht dx^0 für den zeitlichen Abstand zweier „Ereignisse“ (d.h. Punkte im Minkowski-Raum). Seine Bedeutung gründet auf der Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen in der Speziellen Relativitätstheorie gerade unter den Koordinatentransformationen invariant sind, die ds^2 invariant lassen. Die Zeit ist hier keine absolute Größe mehr (wie noch in der Newtonschen Theorie), man spricht von einer vierdimensionalen „Raumzeit“.
In der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird dieser Raum verallgemeinert auf

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\, dx^a dx^b \ .$$

Die Koeffizienten $g_{ab} = g_{ab}(x^c)$, die sogenannte (Raumzeit-) Metrik, kann dabei als symmetrische 4 x 4 - Matrix verstanden werden, die nicht entartet ist und die Signatur $(- +++)$ hat. Im allgemeinen benötigt man für die Beschreibung eines solchen Raums mehrere Koordinatensysteme, er ist topologisch gesprochen eine zusammenhängende Hausdorffsche Mannigfaltigkeit. Im Gegensatz zum Minkowski-Raum kann ein solcher Raum beliebig „gekrümmt“ sein (näheres im ersten Abschnitt). Die noch zu besprechenden Bewegungsgleichungen sollen dabei wie das Linienelement ds^2 unter *allen* Koordinatentransformationen invariant sein. Diese Unabhängigkeit vom zugrundegelegten Koordinatensystem wird als allgemeines Kovarianzprinzip bezeichnet.
Die eigentliche physikalische Idee der ART liegt nun darin, daß der durch g_{ab} beschriebene Raum dynamisch mit der Materie in ihm verknüpft ist, d.h. die Materie „krümmt“ den Raum und bewegt sich ihrerseits auf ausgezeichneten Bahnen des Raums. Um diese Idee mathematisch formulieren zu können, müssen vorher einige Grundzüge der Riemannschen Geometrie angesprochen werden. Mit deren Hilfe kann man die geometrischen Eigenschaften eines Raums intrinsisch, d.h. ohne Bezugnahme auf einen einbettenden „Superraum“, beschreiben. Eine umfangreichere Darstellung der Riemannschen Geometrie ist z.B. in [9].

1.1 Grundzüge der Riemannschen Geometrie

Die mathematischen Größen, die dem Prinzip der Kovarianz gerecht werden, sind die Tensoren. Wenn V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und V^* der duale Vektorraum ist, so ist

ein Tensor T vom Typ (k,l) eine multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{k \text{ mal}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{l \text{ mal}} \to \mathbb{R} \, .$$

Dabei stellt V den Tangentialraum an der Raumzeit-Mannigfaltigkeit und V^* den Kotangentialraum dar. Die Größe $k+l$ definiert man als den Rang des Tensors. Die Komponenten $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ eines solchen Tensors sind die Entwicklungskoeffizienten von T bezüglich einer bestimmten Basis (d.h. eines bestimmten Koordinatensystems). Sie sind aber trotz dieser Abhängigkeit für die kompakte Notation in der ART unerläßlich. Die $a_1, ..., a_k$ nennt man kontravariante Indizes, die $b_1, ..., b_l$ kovariante.
Einfache Beispiele von Tensoren sind Vektoren, Linearformen und Matrizen, sie entsprechen Tensoren vom Typ $(1,0)$, $(0,1)$ bzw. $(1,1)$.
Unter einer Koordinatentransformation $x^a \to \overline{x}^a(x^b)$ transformieren sich Tensorkomponenten wie

$$\overline{T}^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = \frac{\partial \overline{x}^{a_1}}{\partial x^{c_1}} \dots \frac{\partial \overline{x}^{a_k}}{\partial x^{c_k}} \frac{\partial \overline{x}^{d_1}}{\partial x^{b_1}} \dots \frac{\partial \overline{x}^{d_l}}{\partial x^{b_l}} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} \, .$$

Ein Skalar S ist durch $\overline{S} = S$ gekennzeichnet. Hier wurde die Einsteinsche Summationskonvention verwendet: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Dieser Formel kann man den wichtigen Sachverhalt entnehmen, daß ein Tensor, dessen sämtliche Komponenten in einem Koordinatensystem verschwinden, in keinem Koordinatensystemen eine von 0 verschiedene Komponente haben kann.
Es gibt außerdem eine Reihe von Operatoren, die Tensoren in Tensoren überführen: Die einfache Addition bzw. Subtraktion $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} \pm B^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$, das äußere Produkt $T^{a_1 \dots a_{k+m}}{}_{b_1 \dots b_{l+n}} = A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} B^{a_{k+1} \dots a_{k+m}}{}_{b_{l+1} \dots b_{l+n}}$ und die Kontraktion $T^{a_1 \dots a_{k-1}}{}_{b_1 \dots b_{l-1}} = T^{a_1 \dots c \dots a_{k-1}}{}_{b_1 \dots c \dots b_{l-1}}$. Die Hintereinanderausführung von äußerem Produkt und Kontraktion bezeichnet man als Überschiebung.
Die Metrik g_{ab} vermittelt einen Isomorphismus zwischen einem Vektorraum und seinem Dualen und kann so durch Überschiebung kontravariante Komponenten in kovariante überführen. Die mit g^{ab} bezeichnete zu g_{ab} inverse Metrik (d.h. $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$) überführt kovariante in kontravariante, z.B. $T^a{}_b{}^{cde} = g_{bi} \, g^{dj} \, g^{ek} \, T^{aic}{}_{jk}$.
Als nächstes muß man eine Differentiationsvorschrift angeben, die Tensoren in Tensoren überführt. Die gewöhnliche partielle Ableitung $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l, c} := \frac{\partial}{\partial x^c} T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ leistet dieses nicht, da das Ergebnis i.a. kein Tensor ist, was man am Transformationsverhalten sehen kann. Stattdessen führt man die durch die Metrik gegebene kovariante Ableitung ein, die (k,l) - in $(k,l+1)$ - Tensoren überführt und mit einem Semikolon gekennzeichnet wird. Sie ist linear und erfüllt die Leibnitz-Regel. Die genauen Eigenschaften lassen sich z.B. in [37] nachlesen[1].
Zu ihrer Definition benötigt man die durch

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d} \right)$$

definierten Christoffel-Symbole, die keine Tensoren sind und so vom Koordinatensystem abhängen. Mit diesen Größen ist nun

$$\begin{aligned} T_{a;b} &:= T_{a,b} - \Gamma^c_{ab} T_c \\ T^a{}_{;b} &:= T^a{}_{,b} + \Gamma^a_{bc} T^c \end{aligned}$$

und allgemein

$$T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l ; c} := T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l , c} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma^{a_i}_{c\,d} T^{a_1 \dots d \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^{l} \Gamma^d_{c\,b_i} T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots d \dots b_l} \, ,$$

[1] Z.B. fordert man üblicherweise $S_{;a;b} = S_{;b;a}$ für einen Skalar S, was man als Torsionsfreiheit bezeichnet.

wobei jeweils mit der i-ten Stelle überschoben wird. Für einen Skalar stimmen kovariante und gewöhnliche partielle Ableitung überein. Wie man der Definition der Christoffel-Symbole entnehmen kann, ist die Metrik außerdem kovariant konstant:

$$g_{ab;c} = g^{ab}{}_{;c} = 0\,.$$

Die kovariante Ableitung ist für den Begriff der Parallelität in einem Riemannschen Raum entscheidend: Ein Tensor $T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l}$ heißt parallelverschoben entlang einer Kurve mit dem Tangentenvektor u^a, wenn längs der Kurve

$$T^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l;a}\, u^a = 0$$

gilt. Kurven mit $u^a{}_{;b}u^b = 0$ heißen Autoparallelen oder Geodäten.
Um die Krümmung eines Raumes invariant beschreiben zu können, führt man den Riemannschen Krümmungstensor

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^a_{ic}\,\Gamma^i_{bd} - \Gamma^a_{id}\,\Gamma^i_{bc}$$

ein. Er ist durch die Symmetrien $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$, $R_{abcd} = R_{cdab}$, $R_{a(bcd)} := \frac{1}{3}(R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc}) = 0$ gekennzeichnet und erfüllt die Bianchi-Identität $R_{ab(cd;e)} = 0$.
Die kontrahierte Form

$$R_{ab} = R^c{}_{acb}$$

bezeichnet man als Ricci-Tensor und

$$R = R^a{}_a$$

als Ricci-Skalar. Man kann den Krümmungstensor auch über die Beziehung $u_a R^a{}_{bcd} = \frac{1}{2}\,(u_{b;c;d} - u_{b;d;c})$ einführen, was für jedes Vektorfeld u^a gelten soll. Er ist also ein Maß für die Nichtvertauschbarkeit von kovarianten Ableitungen[2]. Der Minkowski-Raum hat gerade die Eigenschaft, daß er flach ist, d.h. $R^a{}_{bcd}$ verschwindet in einem solchen Raum.
Schließlich sei noch die folgende Definition angegeben:

$$\text{Ein Vektor } u^a \text{ heißt } \begin{cases} \text{zeitartig} & , \quad \text{wenn} \quad g_{ab}\,u^a u^b < 0 \\ \text{lichtartig} & , \quad \text{wenn} \quad g_{ab}\,u^a u^b = 0 \\ \text{raumartig} & , \quad \text{wenn} \quad g_{ab}\,u^a u^b > 0 \end{cases}$$

Entsprechend bezeichnet man eine Kurve als zeit-, licht- oder raumartig, wenn ihr Tangentenvektor diese Eigenschaft in jedem Punkt hat.

1.2 Die Allgemeine Relativitätstheorie

Der ART liegt als physikalischer Kern das sogenannte starke Äquivalenzprinzip zugrunde (z.B. [32]):
Lokal ist es physikalisch unentscheidbar, ob ein System in einem Gravitationsfeld ruht oder ob es in einem feldfreien Raum beschleunigt ist.
Das schwache Äquivalenzprinzip behauptet dies für die Gesetze der klassischen Mechanik, was der Äquivalenz von schwerer und träger Masse entspricht[3].
Auf diese Weise kann man die Schwerkraft als eine geometrische Eigenschaft des Raums ansehen. Ein in einem Gravitationsfeld frei fallender Körper, dessen Eigengravitation vernachlässigbar ist (ein „Testteilchen“), spürt in dieser Sichtweise keine (Gravitations-) Kraft, sondern bewegt sich auf einer ausgezeichneten Bahn des Raums. Dessen geometrischen Eigenschaften sind durch das Gravitationsfeld aller Teilchen bestimmt. Die Bahnen sind die oben definierten zeitartigen Geodäten, da sie in gewissem Sinne Kurven minimaler Länge sind (genauer gesagt Kurven

[2] Damit ist er ein Maß für das „Auseinanderdriften“ von Geodäten (z.B. [37]).
[3] Genauer gesagt entspricht es der *Proportionalität* von schwerer und träger Masse.

maximaler Eigenzeit) und daher die natürliche Verallgemeinerung der geraden Linie als kürzester Verbindung zweier Punkte darstellen. Für diese Bahnen $x^a(\tau)$ mit dem Tangentenvektor $\frac{dx^a}{d\tau}$ gilt daher $(\frac{dx^a}{d\tau})_{;b}\,\frac{dx^b}{d\tau} = 0$, d.h. man erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\,\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0\ . \tag{1.1}$$

Die Materie wird in der ART durch den Energie-Impuls-Tensor T^{ab} beschrieben. Dessen Eigenschaften kann man mit Hilfe einer kovarianten Zerlegung beschreiben (z.B. [32]):

$$T^{ab} = \rho\, u^a u^b + 2\, q^{(a}u^{b)} + P\, h^{ab} + \pi^{ab}\ , \tag{1.2}$$

$$q^a u_a = 0\ , \quad \pi^{ab}u_a = \pi^a{}_a = 0\ .$$

Die Größe

$$h^{ab} := g^{ab} + u^a u^b\ , \quad h^{ab}u_a = 0$$

kann man als Projektionstensor auf den zu u^a orthogonalen Unterraum verstehen. Diese Größen haben in dem durch u^a spezifizierten Ruheraum eines Beobachters eine physikalische Bedeutung: ρ läßt sich als Energiedichte interpretieren, P als (isotroper) Druck, q^a ist die Vierer-Energiestromdichte und π^{ab} der anisotrope Druck. Sie lassen sich über

$$\begin{aligned}
\rho &= T^{ab}u_a u_b \\
P &= \frac{1}{3}T^{ab}h_{ab} \\
q^a &= -T^{bc}u_c\, h^a_b \\
\pi^{ab} &= T^{cd}h^a_c\, h^b_d - P\, h^{ab}
\end{aligned}$$

aus T^{ab} gewinnen. Eine ideale Flüssigkeit ist z.B. durch

$$T^{ab} = \rho\, u^a u^b + P\, h^{ab}$$

gekennzeichnet. Man kann außerdem zeigen, daß die Gleichung $T^{ab}{}_{;b} = 0$ als Energieerhaltung interpretiert werden kann (z.B. [32]).
Um den Einfluß der Materie auf die Geometrie des Raumes zu beschreiben, liegt es nahe, T^{ab} mit der Metrik g_{ab} und dem Riemannschen Krümmungstensor, der erste und zweite Ableitungen von g_{ab} enthält, in Beziehung zu setzen. Dabei soll $T^{ab}{}_{;b} = 0$ gewährleistet sein. Die allgemeinste Relation dieser Art, die linear in den zweiten Ableitungen von g_{ab} ist, lautet [19]

$$R^{ab} - \frac{1}{2}R\, g^{ab} + \Lambda\, g^{ab} = \kappa\, T^{ab} \tag{1.3}$$

mit $\Lambda = const.$ und einem Kopplungsparameter κ. Dieses ist (aufgrund der Symmetrie der Komponenten) ein System aus 10 gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die man als Einsteinsche Feldgleichungen oder einfach als Feldgleichungen bezeichnet. Das Verschwinden von $(R^{ab} - \frac{1}{2}R\, g^{ab} + \Lambda\, g^{ab})_{;b}$ folgt dabei direkt aus der Bianchi-Identität $R_{ab(cd;e)} = 0$ aus dem vorigen Abschnitt. Den Tensor

$$G^{ab} := R^{ab} - \frac{1}{2}R\, g^{ab}$$

nennt man Einstein-Tensor. Man kann zeigen (z.B. [38]), daß die Einsteinschen Feldgleichungen in erster Näherung die Newtonsche Gravitationstheorie in Form der Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential liefern, wenn man als Kopplungsparameter

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

ansetzt. In dieser Arbeit werden Einheiten mit $G = c = 1$ (und $k_B = 1$) benutzt, so daß von nun an $\kappa = 8\pi$ ist.
Die Größe Λ heißt kosmologische Konstante. Aus astronomischen Beobachtungen weiß man, daß Λ nicht größer als $(2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{GeV})^4$ ist [3], was in Planck-Einheiten einer dimensionslosen Größe von etwa 10^{-122} entspricht. Der Einfluß der kosmologischen Konstante ist also vernachlässigbar klein, so daß man üblicherweise $\Lambda = 0$ setzt. Das soll auch in dieser Arbeit getan werden. Wie in Abschnitt 3.3 kurz angesprochen wird, hat Λ allerdings möglicherweise in der extremen Frühphase des Universums eine wichtige Rolle gespielt.

1.3 Killing-Vektoren und Raumzeit-Symmetrien

Dieser Abschnitt hat einen etwas spezielleren Inhalt, er ist aber für das Verständnis dieser Arbeit unverzichtbar.
Ein durch eine Metrik beschriebener Raum läßt sich charakterisieren, indem man die möglichen Symmetrietransformationen untersucht. Dazu reicht es aus, infinitesimale Transformationen der Form

$$\overline{x}^a = x^a + \epsilon\, \xi^a(x^b)$$

mit $\epsilon > 0$, $\epsilon \ll 1$ zu betrachten. Wenn die Metrik unter einer solchen Transformation invariant ist, d.h. wenn

$$\overline{g}_{ab} = g_{ab}$$

gilt, so sind die ξ^a Erzeuger von isometrischen Abbildungen und werden Killing-Vektoren genannt. Man kann zeigen (z.B. [38]), daß diese Bedingung äquivalent ist zu

$$\xi_{(a;b)} = 0\,.$$

Jedes Vektorfeld, das diese Gleichung erfüllt, ist ein Killing-Vektorfeld.
Mit Hilfe der Killing-Vektoren kann man den zugrundeliegenden Raum invariant charakterisieren. Aus der Existenz eines zeitartigen Killing-Vektors folgt zum Beispiel, daß man der Metrik eine Form geben kann, in der sie nicht explizit von x^0 abhängt. Wählt man nämlich $\xi^a = \delta^a_0$, was für zeitartige Vektoren immer möglich ist, gilt

$$0 = \xi_{(a;b)} = g_{ab,c}\,\xi^c + g_{ac}\,\xi^c{}_{,b} + g_{bc}\,\xi^c{}_{,a} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,g_{ab}\,.$$

Eine solche Metrik nennt man stationär. Wenn der Killing-Vektor außerdem hyperflächenorthogonal ist, so daß die $g_{0\mu}$-Komponenten verschwinden müssen, heißt sie statisch. Die Hyperflächenorthogonalität ist dabei mit dem Verschwinden der in Abschnitt 2.3 definierten Rotation äquivalent.
Man kann zeigen (z.B. [38]), daß ein N - dimensionaler Riemannscher Raum maximal $\frac{1}{2}N(N+1)$ verschiedene (d.h. linear unabhängige) Killing-Vektoren zuläßt. Läßt er genau die maximale Anzahl zu, so ist er ein Raum konstanter Krümmung, der homogen und isotrop ist. Die in Abschnitt 3.1 besprochenen dreidimensionalen raumartigen Hyperflächen der Robertson-Walker-Metrik sind gerade von diesem Typ.
Um die Killing-Vektoren koordinatenfrei klassifizieren zu können, ist es nützlich, die durch $X_A := \xi^a_{(A)}\,\frac{\partial}{\partial x^a}$ erzeugte Lie-Algebra zu untersuchen, wobei A einfach die Killing-Vektoren durchnummerieren soll. Wegen der Lie-Algebra-Struktur gelten nämlich die Vertauschungsrelationen

$$[X_A, X_B] = K^C_{AB}\,X_C\,. \tag{1.4}$$

Die Strukturkonstanten K^C_{AB} charakterisieren die Algebra und somit die Metrik bezüglich ihrer Symmetrieeigenschaften eindeutig (z.B. [32]).

Als Bianchi-Modelle bezeichnet man die Metriken, die räumlich homogen sind und drei Killing-Vektoren besitzen. Durch eine Klassifikation der zugehörigen Strukturkonstanten teilt man sie in neun verschiedene Bianchi-Typen I bis IX auf (z.B. [32], [17]).
Schließlich kann man mit Hilfe eines Killing-Vektors ξ^a eine Erhaltungsgröße in dem folgenden Sinne konstruieren. Entlang einer Geodäte mit dem Tangentenvektor u^a ist die Größe $(\xi_a u^a)$ konstant:

$$\begin{aligned}(\xi_a u^a)_{;b}\, u^b &= \xi_{a;b}\, u^a u^b + \xi_a u^a{}_{;b} u^b \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet dabei wegen $\xi_{(a;b)} = 0$ und der zweite wegen der vorausgesetzten Geodizität.

2. Die allgemeinrelativistische Kinetische Theorie

2.1 Die Kinetische Theorie in der ART und die Liouville-Gleichung

Hier soll mit Hilfe einer kovariant formulierten Kinetischen Theorie ein Gas von Teilchen beschrieben werden, wobei verschiedene Teilchensorten vorhanden sein dürfen, die sich durch ihre Masse, ihre Ladung, ihren Spin usw. unterscheiden. Außerdem soll es erlaubt sein, daß es zu Stößen zwischen den Teilchen kommt, bei denen es auch (z.B. aufgrund von kurzreichweitigen Kernkräften) zu Typumwandlungen kommen kann. Zwischen solchen Stößen, von denen man annehmen muß, das sie zeitlich und räumlich begrenzt sind, sollen sie sich aber wie Testteilchen in ihrem kollektiv erzeugten Gravitationsfeld und einem eventuell vorhandenen äußeren elektromagnetischen Feld auf Weltlinien $x^a(s)$ bewegen. Als Bewegungsgleichungen erhält man daher

$$\frac{dx^a}{ds} = p^a \ , \quad \frac{dp^a}{ds} = -\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c + eF^a{}_b p^b \ , \tag{2.1}$$

wobei p^a der Viererimpuls der Teilchen ist. Als Abkürzung benutzt man oft

$$\frac{Dp^a}{Ds} := (p^a)_{;b}\, p^b = \frac{dp^a}{ds} + \Gamma^a_{bc}\, p^b p^c \ .$$

Die Ruhemasse der Teilchen erhält man über $m^2 = -p_a p^a$. Für $m \neq 0$ ist $\tau = m\, s$ die Eigenzeit der Teilchen, und es gilt $p^a = m\, \frac{dx^a}{d\tau}$.
Im folgenden soll nun der mathematische Rahmen für die Beschreibung eines solchen Systems vorgeführt werden. Die Darstellung wurde dabei von Ehlers [7] übernommen.
Da das Wertepaar (x, p) einen Teilchenzustand vollständig charakterisiert, führt man den 8-dimensionalen (Einteilchen-) Phasenraum

$$M := \{\, (x,p) \mid p_a p^a \leq 0\, ,\ p \text{ zukunftsgerichtet}\}$$

ein. Geometrisch gesehen ist x ein Element der zugrunde liegenden Raumzeit-Mannigfaltigkeit X, p ein Element des Tangentialraums $T_x X$ und M (wegen der Einschränkung an p) eine Untermannigfaltigkeit des Tangentialbündels TX.
Aus den Bewegungsgleichungen folgt, daß der sogenannte Liouville-Operator

$$L = \frac{d}{ds} = p^a \frac{\partial}{\partial x^a} + (-\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c + eF^a{}_b p^b)\, \frac{\partial}{\partial p^a} \tag{2.2}$$

die Integralkurven $(x(s), p(s))$ (den „Phasenraumfluß“) generiert. Dabei gilt wegen $F^{ab} p_a p_b = F^{(ab)} p_a p_b = 0$

$$\begin{aligned} L(m^2) &= L(-g_{ab}\, p^a p^b) \\ &= -g_{ab,c}\, p^c p^a p^b + 2\, \Gamma^a_{bc}\, p^b p^c p_a \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Die Masse ist also auf den Weltlinien konstant. Man führt daher den 7-dimensionalen Phasenraum für Teilchen der Masse m ein:

$$M_m := \{\, (x,p) \in M \mid p_a p^a = -m^2 = const. \} \; .$$

Im Gegensatz zum klassischen Phasenraum ist die Zeit hier also ein Teil des Zustandes.
Da Teilchen verschiedener Sorte sich auch bezüglich Ladung, Spin usw. unterscheiden, soll von nun an der 7-dimensionale Phasenraum M_j für Teilchen der Sorte j (mit Masse m_j) und der zugehörige Liouville-Operator L_j betrachtet werden.
Damit hat man für jede Teilchensorte j eine durch L_j aufgespannte Schar von Integralkurven im Phasenraum M_j, die *möglichen* Teilchenbahnen entsprechen. Welche davon tatsächlich besetzt sind, hängt vom jeweiligen System ab. Wenn Stöße auftreten, bei denen die obigen Bewegungsgleichungen nicht mehr gelten, können solche besetzten Bahnen abbrechen oder entstehen, da das Teilchen dann auf eine andere Integralkurve von L_j geworfen wird. Diese können sogar in einem anderen Phasenraum liegen (das ist der Fall, wenn bei dem Stoß eine Typumwandlung stattfindet).
Für die Charakterisierung eines konkret vorliegenden Systems ist es nun wichtig, quantitativ beschreiben zu können, welche der möglichen Zustände besetzt sind und welche nicht.
Dazu sei $N_j(\Sigma)$ die Zahl der besetzten Integralkurven (Zustände), die eine 6-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit Σ von M_j schneiden. Durch die Funktionale $N_j : \Sigma \to N_j(\Sigma)$ ist der Mikrozustand des Systems eindeutig festgelegt. Man kann nun für die Beschreibung des Makrozustands über

$$\overline{N}_j(\Sigma) = \int_\Sigma f_j \, \omega_j$$

eine stetige nichtnegative Funktion $f = f(x,p)$, die sogenannte Verteilungsfunktion, einführen, die das Ensemble-Mittel $\overline{N}_j(\Sigma)$ von $N_j(\Sigma)$ invariant (d.h. unabhängig von Σ) charakterisiert [7]. Dabei ist ω_j ein invariantes 6-dimensionales Volumenelement bezüglich Σ. Wie im nächsten Abschnitt ausgeführt wird, kann man mit Hilfe dieser Funktion die Größen definieren, die den Zustand des Makrosystems üblicherweise festlegen, insbesondere den Energie-Impuls-Tensor.
Außerdem kann man zeigen, daß $L_j(f_j)$ der Dichte der Stöße im Phasenraum entspricht [7], genauer gesagt der Dichte der Zustandserzeugungen. Wenn man annimmt, daß keine Stöße vorkommen oder daß ein Gleichgewicht zwischen Zustandserzeugung und -vernichtung herrscht, erhält man so $L_j(f_j) = 0$, d.h.

$$\frac{df_j}{ds} = p^a \frac{\partial f_j}{\partial x^a} + \left(-\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c + e F^a{}_b p^b\right) \frac{\partial f_j}{\partial p^a} = 0 \; . \tag{2.3}$$

Diese Gleichung wird Liouville-Gleichung genannt.
Im allgemeinem Fall erhält man

$$\frac{df_j}{ds} = C_j(f_j) \; ,$$

wobei der Stoßterm $C_j(f_j)$ ein komplizierter Integralausdruck ist, auf den hier nicht näher eingegangen werden soll. Diese Gleichung, die die Liouville-Gleichung als Spezialfall $C_j(f_j) = 0$ umfasst, nennt man Boltzmann-Gleichung. Exakte Lösungen lassen sich für diese Gleichung aber normalerweise selbst für einfachste Systeme nicht gewinnen.

2.2 Energie-Impuls-Tensor und Bilanzgleichungen

Die Größen in diesem Abschnitt sollen sich nur auf eine Teilchensorte beziehen, der Index j für die Teilchensorte wird daher von nun an weggelassen. Dieses bedeutet keine Einschränkung der Ergebnisse, da die Größen für die jeweiligen Teilchensorten zusammengenommen natürlich das Gesamtsystem beschreiben.

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion f kann man

$$N^a(x) := \int p^a f(x,p)\,\pi_m$$

als Teilchen-Viererstromdichte interpretieren [7]. Lokal gesehen ist N^0 im Ruheraum eines Beobachters gleich der Teilchenzahldichte, und (N^μ) entspricht dem Teilchenzahlvektor.
Dabei soll π_m ein invariantes Volumenelement auf der 3-dimensionalen Massenschale $p_a p^a = -m^2 = const.$ sein. Die exakte Behandlung von invarianten Volumenelementen in der Riemannschen Geometrie ist ein relativ schwieriges Kapitel, für das man hier noch einige differentialgeometrische Methoden vorstellen müßte. Für die praktische Anwendung der Kinetischen Theorie ist es aber ausreichend, wenn man die konkrete Form der vorkommenden Volumenelemente kennt. Ausführliche Darstellungen finden sich z.B. in [7] und [18]. Für π_m kann man die folgenden Ausdrücke angeben:

$$\begin{aligned}
\pi_m &= (-g)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|p_0|}\, dp^{123}\,, \quad dp^{123} := dp^1 dp^2 dp^3 \\
\pi_m &= (-g)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|p^0|}\, dp_{123}\,, \quad dp_{123} := dp_1\, dp_2\, dp_3\,.
\end{aligned}$$

Dabei steht g für die Determinante der Metrik. Auch der Energie-Impuls-Tensor läßt sich über f definieren[1]:

$$T^{ab}(x) := \int p^a p^b f(x,p)\,\pi_m\,. \tag{2.4}$$

Diese Beziehung ist praktisch das Bindeglied zwischen Aussagen der Kinetischen Theorie über f und makroskopischen Materieeigenschaften, wie sie z.B. in den Feldgleichungen auftreten.
Für einfache Systeme (elastische binäre Kollisionen) kann man dabei die in Abschnitt 1.2 beschriebenen Zerlegungskomponenten von T^{ab} mit thermodynamischen Größen wie der Schub- und Scherviskosität in Beziehung setzen (z.B. [7], [25]). In dieser Arbeit, in der Lösungen der Liouville-Gleichung untersucht werden, haben diese Größen aber keine Bedeutung.

Schließlich kann man noch aus der Liouville-Gleichung $L(f) = 0$ gewisse Bilanzgleichungen ableiten. Wie in [7] gezeigt wird, ist z.B.

$$N^a{}_{;a} = \int L(f)\,\pi_m\,.$$

Physikalisch gesehen drückt $N^a{}_{;a} = 0$ die Erhaltung der Teilchenzahl aus. Für die elektrische Viererstromdichte $J^a := eN^a$ ergibt sich im Fall $L(f) = 0$ analog $J^a{}_{;a} = 0$, was die Erhaltung der Ladung beschreibt.
Eine wichtige Beziehung ist die entsprechende Relation für den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{ab}{}_{;b} = \int L(f)\,p^a\,\pi_m + \int \frac{Dp^a}{Ds} f\,\pi_m\,. \tag{2.5}$$

Für $L(f) = 0$ liefert sie wegen der hier angenommenen Bewegungsgleichung $\frac{Dp^a}{Ds} = eF^a{}_b p^b$ die bekannte Relation

$$T^{ab}{}_{;b} = F^a{}_b\, J^b\,.$$

[1] Eigentlich taucht hier wie schon bei der Definition von N^a auf der rechten Seite der Faktor $\hbar^{-3}$ auf. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird er aber nicht mitgeführt.

2.3 Die kinematischen Eigenschaften einer Kurvenkongruenz

Auf die hier vorgeführte Zerlegung von $u_{a;b}$ wird in dieser Arbeit oft zurückgegriffen.
Die kinematischen Eigenschaften einer Materieverteilung, die durch ein Vektorfeld u^a beschrieben wird, erhält man aus der kovarianten Zerlegung von $u_{a;b}$ in der Form (z.B. [32])

$$u_{a;b} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} - \dot{u}_a u_b + \frac{1}{3}\theta\, h_{ab}\ ,$$

$$\sigma_{ab}u^a = \sigma_{[ab]} = \sigma^a{}_a = 0\ , \quad \omega_{ab}u^a = \omega_{(ab)} = 0$$

(mit $h_{ab} := g_{ab} + u_a u_b$). Umgekehrt lassen sich diese Größen ausdrücken als

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab} &= h^c_a h^d_b\,(u_{(c;d)} - \frac{1}{3}u^e{}_{;e}\, h_{cd}) \\
\omega_{ab} &= h^c_a h^d_b\, u_{[c;d]} \\
\dot{u}_a &= u_{a;b}\, u^b \\
\theta &= u^a{}_{;a}\ .
\end{aligned}$$

Man kann zeigen (z.B. [32]), daß diese Größen im Ortsraum eines Beobachters eine bestimmte physikalische Bedeutung haben, wenn man die Entwicklung eines dreidimensionalen Volumenelments V betrachtet:

- σ_{ab} ist die Scherung, sie beschreibt eine volumentreue Gestaltänderung von V.
- ω_{ab} ist die Rotation, sie beschreibt eine starre Rotation von V.
  Eine verschwindende Rotation ist gleichbedeutend mit der Hyperflächenorthogonalität von u^a.
- $\dot{u}_a$ ist die Beschleunigung von V.
  Eine verschwindende Beschleunigung ist gleichbedeutend mit der Geodizität von u^a.
- θ ist die Expansion, sie beschreibt eine gestalttreue Volumenänderung von V.

Die im nächsten Kapitel vorgestellte Robertson-Walker-Metrik hat z.B. die Eigenschaft, daß das zugehörige Geschwindigkeitsfeld scherungs-, rotations- und beschleunigungsfrei ist.

3. Das Kosmologische Standardmodell

3.1 Kosmologisches Prinzip und Robertson-Walker-Metrik

Die Aufgabe, die Struktur und Entwicklung des gesamten Universums zu ergründen, scheint schon deshalb ein hoffnungsloses Unterfangen zu sein, weil wir nur einen räumlich und zeitlich äußerst kleinen Teil davon direkt beobachten können. Außerdem liegt das Universum (definitionsgemäß) nur einmal vor und kann nicht von „außerhalb“ analysiert werden, was einen erheblichen erkenntnistheoretischen Unterschied zu allen anderen Bereichen der Physik bedeutet.
Die einzige Möglichkeit scheint darin zu bestehen, einfache Grundannahmen zu machen, deren Implikationen dann mit Hilfe der ART und den uns zur Verfügung stehenden beobachtenden Mitteln überprüft und später verfeinert werden können. Diese Annahmen können dabei aus grundlegenden Beobachtungen motiviert sein (z.B. der Beobachtung des Sternenhimmels) oder einem eher philosophischen Hintergrund entspringen. Auf ein Prinzip, das praktisch den Begriff „Naturgesetz“ konstituiert, kann man dabei nicht verzichten: *Die Naturgesetze und Naturkonstanten sind an allen Orten und zu allen Zeiten gleich.* Daß man auf diese Weise überhaupt ein konsistentes Bild des Universums erhält, ist dabei keineswegs von vorneherein sichergestellt.
Tatsächlich gelangt man aber mit den beiden folgenden einfachen Annahmen zu einem Modell, dem kosmologischen Standardmodell, das sich in der Beschreibung der großräumigen Strukturen des Universums als bemerkenswert gut herausgestellt hat und viele Beobachtungen in natürlicher Weise erklären kann. Die Annahmen, die zusammengenommen als kosmologisches Prinzip bezeichnet werden, sind

- Homogenität
  Das Universum ist auf großen Skalen gleichförmig, kein Punkt ist ausgezeichnet.

- Isotropie
  Das Universum sieht in jeder Richtung gleich aus.

Die erste Annahme drückt aus, daß unser Standort im Universum nicht vor anderen ausgezeichnet ist, was ein eher weltanschauliches Prinzip ist und auch Kopernikanisches Prinzip genannt wird. Die zweite Annahme gründet sich vor allem auf Beobachtungen der großräumigen Verteilung der Galaxien und der noch zu besprechenden Mikrowellen-Hintergrundstrahlung, die bis auf eine relative Abweichung von ca. 10^{-5} völlig isotrop ist.
Diese intuitiven Formulierungen lassen sich mathematisch präzisieren [37]:

- Homogenität: Die Raumzeit besitzt eine Foliation aus einer einparametrigen Familie von raumartigen Hyperflächen Σ_t, so daß es für jedes t und zwei Punkte P, $Q \in \Sigma_t$ eine Isometrie der Raumzeitmetrik gibt, die P und Q ineinander überführt.

- Isotropie: Es gibt eine Kongruenz von zeitartigen Kurven mit Tangentenvektoren u^a, die die Raumzeit ausfüllen und die folgende Eigenschaft haben: Zu jedem Punkt P und zwei (raumartigen) Vektoren r_a und s_a am Punkt P, die orthogonal zu u_a sind, gibt es eine Isometrie der Raumzeitmetrik, die r_a und s_a ineinander überführt, ohne P und u_a zu verändern. Man kann also keinen geometrisch ausgezeichneten Vektor konstruieren, der orthogonal zu u_a ist.

In einem homogenen und isotropen Universum sind die Homogenitäts - Hyperflächen Σ_t orthogonal zu den Tangenten u^a der Weltlinienkongruenz.

Die Geometrie dieser dreidimensionalen Hyperflächen soll nun etwas präzisiert werden. Ein homogener isotroper Raum mit der Metrik γ_{ab} ist ein Raum konstanter Krümmung mit dem Krümmungstensor (z.B. [38])

$$R_{\alpha\mu\nu\sigma} = K\left(\gamma_{\mu\sigma}\gamma_{\alpha\nu} - \gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\sigma}\right)$$

und dem Linienelement

$$ds^2 = a(t)^2\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2}\,, \quad k = -1\,,\,0\,,\,1$$

mit $r^2 := x^2 + y^2 + z^2$. Dabei ist $a(t)$ eine beliebige positive Funktion, die Skalenparameter (oder auch Weltenradius) genannt wird. Gemäß dem Wert von k spaltet sich der Raum in drei verschiedene Typen auf. Für $k = -1$ liegt ein Raum konstanter negativer Krümmung vor, $k = 0$ entspricht einem flachen Raum, und der durch $k = 1$ gegebene Raum ist endlich und hat eine konstante positive Krümmung. Die Universen heißen entsprechend offen, flach oder geschlossen. Aus astronomischen Beobachtungen und vor allem aus theoretischen Gründen glaubt man heute, daß unser Universum praktisch flach ist.
Wegen der Orthogonalität von Σ_t und u^a (den Tangenten der Weltlinienkongruenz) kann das Linienelement der vierdimensionalen Raumzeit keine gemischten Terme von Zeit- und Ortsdifferentialen enthalten. Es lautet daher

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \frac{k}{4}r^2)^2}\,, \quad k = -1\,,\,0\,,\,1\,. \tag{3.1}$$

Diese Metrik heißt Robertson-Walker-Metrik, sie ist die Grundlage des Kosmologischen Standardmodells. Die Zeitentwicklung der Funktion $a(t)$ als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen soll im nächsten Abschnitt behandelt werden.

3.2 Die Zeitentwicklung der Robertson-Walker-Metrik

Den beiden Grundannahmen der Homogenität und Isotropie muß man noch eine Annahme hinzufügen, wenn die Zeitentwicklung des Universums betrachtet werden soll:
Die großräumigen Strukturen des Universums werden nur durch Gravitationskräfte beeinflußt.
Wegen der Kurzreichweitigkeit der Kernkräfte und der weitgehenden Neutralisierung der elektrischen Ladungen auf großen Skalen ist dies eine sehr plausible Annahme. Wenn man die ART voraussetzt, ergeben sich daraus zwei Folgerungen:

- Testteilchen (d.h. Teilchen mit vernachlässigbarer Eigengravitation) mit Viererimpulsen $p^a(s)$ bewegen sich auf Geodäten:

$$\frac{Dp^a}{Ds} = p^a{}_{;b}\,p^b = 0\,.$$

- Materie und Metrik sind durch die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R^{ab} - \frac{1}{2}R\,g^{ab} = \kappa\,T^{ab}$$

  miteinander verknüpft. Wegen der Homogenität und Isotropie können außerdem keine Energieströme und kein anisotroper Druck auftreten. Die Materie liegt daher in Form einer idealen Flüssigkeit vor:

$$T^{ab} = \rho\,u^a u^b + P\,h^{ab}\,.$$

Die Feldgleichungen implizieren somit (z.B. [38])

$$(\rho\, a^3)^{\cdot} + P\,(a^3)^{\cdot} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho\,, \tag{3.3}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach t abkürzen soll. Wenn die Zustandsgleichung, die ρ und P miteinander in Beziehung setzt, bekannt ist, kann man so eine Lösung für $a(t)$ und für $\rho(t)$ und $P(t)$ gewinnen.
Die erste Gleichung kann man als Bilanzgleichung zur Erhaltung der Energie interpretieren (z.B. [32]).
Durch Differentiation der zweiten Gleichung erhält man

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2}\,(\rho + 3P)\ .$$

Für $\rho + 3P > 0$, was aus physikalischen Gründen immer erfüllt sein sollte[1], ist also $\ddot{a} < 0$. Das Universum kann daher nicht statisch sein, es expandiert ($\dot{a} > 0$) oder kontrahiert ($\dot{a} < 0$). Dieses geschieht in dem Sinne, daß sich der typische Abstand zweier freifallender Systeme (z.B. Galaxien) vergrößert oder verkleinert. Es gibt aber kein ausgezeichnetes Zentrum der Expansion bzw. Kontraktion.
Im Jahre 1929 entdeckte E. Hubble mit Hilfe der Rotverschiebung, daß sich alle (zumindest alle entfernteren) Galaxien von uns weg bewegen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die proportional zu ihrer Entfernung ist. Dieses ist ein eindrucksvoller Beleg für die gegenwärtige Expansion des Universums und das kosmologische Standardmodell überhaupt. Genau dieses Bild müßte sich nämlich jedem Beobachter im Universum bieten: Wenn $R(t) = R_0\, a(t)$ der Abstand zu einer Galaxie zum Zeitpunkt t ist, gilt offensichtlich $\frac{dR}{dt} = R\,\frac{\dot{a}}{a}$. Die Größe $\frac{\dot{a}}{a}$ wird als Hubble-Parameter H bezeichnet.
Wenn die Expansion zu allen Zeiten gleich schnell ablief, ist $\dot{a} = const.$ und somit $a \sim (t - t_0)$. Dieses führt zu dem Ergebnis, daß vor einem endlich langen Zeitraum $t - t_0 = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H}$ der Skalenparameter a gleich 0 war, was einem unendlich dichten und heißen Universum entspricht und gemeinhin als Urknall oder „big bang“ bezeichnet wird. Wegen $\ddot{a} < 0$ kann dieser Zeitraum höchstens kleiner als $\frac{1}{H}$ sein. Aus der erwähnten Galaxienflucht kann man die heutige Größe von H auf Werte zwischen $40\,\frac{km/s}{Mpc}$ und $100\,\frac{km/s}{Mpc}$ eingrenzen, was zu einem maximalen Weltalter von 10 bis 25 Milliarden Jahren führt. Dies stimmt recht gut mit den ältesten bekannten Sternen überein, deren Alter auf maximal 20 Milliarden Jahren geschätzt wird.
Um exakte Lösungen der Feldgleichungen formulieren zu können, sollen zwei wichtige Spezialfälle betrachtet werden: Das Strahlungsuniversum mit $P = \frac{1}{3}\rho$ und das Staubuniversum mit $P = 0$. Während für unsere Epoche das Staubuniversum ein sehr gutes Modell ist, glaubt man, daß zu früheren Zeiten Materie in Form von Strahlung vorherrschend war. In einem flachen Robertson-Walker-Universum ergibt sich (z.B. [38])

$$P = \frac{1}{3}\rho\ :\quad a = a_0\,(t - t_0)^{\frac{1}{2}}\,,\quad \rho \sim a^{-4} \tag{3.4}$$

$$P = 0\ :\quad a = a_0\,(t - t_0)^{\frac{2}{3}}\,,\quad \rho \sim a^{-3}\ . \tag{3.5}$$

Während das offene Modell ($k = -1$) eine qualitativ ähnliche Zeitentwicklung besitzt, kommt es in dem geschlossenen ($k = 1$) nach einer gewissen Zeit zu einem Ende der Expansion und dann zu einer Kontraktion, die in einem dem Urknall analogen Zustand mit $a = 0$ (dem „big crunch“) mündet. Für $t \to t_0$ zeigen aber alle Modelle das gleiche Verhalten.

[1] Die mögliche Verletzung dieser Bedingung in der extremen Frühphase des Universums ist hier nicht von Bedeutung.

3.3 Die Physik des Urknallmodells

In diesem Abschnitt soll skizziert werden, welche Schlußfolgerungen man aus der Annahme ziehen kann, daß die uns bekannte Physik auch im frühen Universum Bestand hatte. Das Vertrauen dafür, sich so dem Urknall bis auf 10^{-5} oder gar weniger Sekunden zu nähern, gründet sich dabei auf die Tatsache, daß die Mikrophysik unterhalb der Temperaturen, die nach dem kosmologischen Standardmodell nach dieser Zeit herrschen, recht gut bekannt und im Labor testbar ist, wenn keine Gravitationseffekte auftreten. Die Gravitationswechselwirkung ist aber gegenüber den anderen Grundkräften der Natur um viele Größenordnungen kleiner. Außerdem scheinen die wenigen nachprüfbaren Konsequenzen (siehe unten) dieses Modell zu bestätigen.
Die im folgenden nachgezeichnete Entwicklung des Universums läßt sich z.B. in [38], [27], [37] nachlesen, so daß nicht ständig auf die Literatur verwiesen wurde.
Wie man an den Friedmann-Lösungen (3.4), (3.5) sieht, steigt die Energiedichte der Strahlung stärker als die der Staubmaterie an, wenn a gegen 0 geht. Zu frühen Zeiten war daher Strahlung mit $\rho \sim a^{-4} \sim t^{-2}$ die dominierende Materieform, und für die Temperatur erhält man aufgrund des Stefan-Boltzmann-Gesetzes $\rho \sim T^4$ die Beziehung $T \sim a^{-1} \sim t^{-\frac{1}{2}}$. Zu sehr kleinen Zeiten muß die Temperatur so groß gewesen sein, daß Paarerzeugungsprozesse auch für massive Teilchen mit den entsprechenden Zerfallsprozessen im Gleichgewicht waren. Mit fallender Temperatur konnten dann schwere Teilchen nicht mehr erzeugt werden, und immer mehr Teilchen traten aus dem thermischen Gleichgewicht aus.
So glaubt man, daß das Universum zunächst aus einem extrem dichten und heißen Plasma relativistischer Teilchen bestand, in dem Quarks, Leptonen und Eichbosonen mitsamt ihren Antiteilchen im thermischen Gleichgewicht waren. Der Zustand noch vor dieser Phase[2], in dem Quanteneffekte wichtig waren, ist Untersuchungsgegenstand der Quantenkosmologie. Deren Status als physikalische Theorie ist aber schon wegen der Ermangelung einer quantenmechanischen Gravitationstheorie mehr als zweifelhaft. Auch auf die Theorie des „inflationären Universums“ soll hier nicht eingegangen werden. Sie sagt eine kurzzeitige exponentielle Expansion des Universums etwa $10^{-35}\,s$ nach dem Urknall voraus, die aus einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante resultiert.
Unterhalb einer Temperatur von etwa $10^{13}\,K$, und somit etwa $10^{-5}\,s$ nach dem Urknall, konnten sich dann stabile Hadronen bilden, und das Universum bestand praktisch ausschließlich aus Neutrinos, Antineutrinos, Photonen, Elektronen, Positronen, Myonen, Antimyonen und einer kleinen Menge von Protonen und Neutronen im thermischen Gleichgewicht.
Nach etwa $0.1\,s$ und bei Temperaturen von $5 \cdot 10^{10}\,K$ konnten keine Myonen-Antimyonen-Paare mehr erzeugt werden, so daß diese zerstrahlten. Dadurch wurde die Wechselwirkung der Neutrinos mit den anderen Teilchen so klein, daß sie aus dem Gleichgewicht entkoppelten und sich nach etwa $2\,s$ praktisch frei entwickelten. Diese Neutrinos müßte man auch heute noch als eine auf etwa $2\,K$ abgekühlte Schwarzkörperstrahlung messen können. Aufgrund der extrem kleinen Wechselwirkung der Neutrinos mit anderer Materie wird dieses aber in naher Zukunft nicht möglich sein.
Nach etwa $4\,s$ und bei $5 \cdot 10^9\,K$ zerstrahlten Elektronen und Positronen in Photonen, wobei alle Positronen und der Großteil der Elektronen vernichtet wurden. Durch die Zerstrahlungsenergie erhielten die Photonen dabei eine um den Faktor 1.4 höhere Temperatur als die Neutrinos.
Als die Temperatur unter $10^9\,K$ fiel, was nach etwa 3 Minuten der Fall war, konnten sich in komplizierten Prozessen stabile Atomkerne wie ${}^4He^{++}$, D^+, ${}^3He^{++}$, ${}^7Li^{+++}$ usw. bilden. Nur ${}^4He^{++}$ stellte aber mit ca. 25 Prozent einen nennenswerten Anteil an der Gesamtmasse der Materie, die sonst praktisch nur aus Protonen bestand. Die Tatsache, daß dieses theoretisch berechnete Massenverhältnis, das durch spätere Prozesse (z.B. Nukleosynthese in Sternen) nur minimal verändert werden konnte, mit dem heute beobachteten Verhältnis in Übereinstimmung ist, bildet eine der Hauptstützen des heißen Urknallmodells.

[2] Genauer gesagt vor der Planck-Zeit $5 \cdot 10^{-44}\,s$.

Die als Rekombination bezeichnete Bildung von neutralem Wasserstoff aus Protonen und Elektronen fand nach etwa $4 \cdot 10^5$ Jahren bei Temperaturen von 4000 K statt. Da die Photonen danach nicht mehr an freien Elektronen oder Ionen gestreut werden konnten, kam es so zu einer Abkopplung der Photonen, das Universum wurde „durchsichtig“. Das Universum müßte heute also mit einer Schwarzkörperstrahlung von Photonen gefüllt sein, die sich seit der Rekombination frei entwickelten. Genau diese 1948 von G. Gamov vorhergesagte Mikrowellen-Hintergrundstrahlung wurde 1965 zufällig von A.A. Penzias und R.W. Wilson entdeckt, was ihnen bekanntlich den Nobelpreis einbrachte. Sie ist über den gesamten Himmel praktisch isotrop. Nach neuesten Messungen beträgt der relative Temperaturunterschied[3] etwa 10^{-5}. Damit stellt sie das vielleicht wichtigste Indiz für das kosmologische Standardmodell dar, insbesondere für die Grundannahme der Isotropie.
Nach der Rekombination konnten sich kleine Inhomogenitäten zu Galaxien und Sternen entwickeln. Die dazu notwendigen Inhomogenitätsskalen sind allerdings nicht mit der hohen Isotropie der Hintergrundstrahlung vereinbar. Dieses stellt eines der größten Probleme der heutigen Kosmologie dar, das auch durch das mögliche Vorhandensein von nichtbaryonischer Materie („dark matter“) noch nicht befriedigend gelöst werden konnte.
Nach etwa 10^5 Jahren wurde dann der Energiebeitrag der Baryonen größer als der der Strahlung. Das Universum wurde Staub-dominiert, was es bis heute, 15 bis 25 Milliarden Jahre nach dem Urknall, immer noch ist.

[3] Tatsächlich mißt man zusätzlich einen Dipolanteil mit einer Temperaturanisotropie von etwa $3 \cdot 10^{-3}$, der aus der Relativbewegung der Erde zum Mikrowellenhintergrund resultiert.

Teil I

Isotrope Lösungen der Einstein-Liouville-Gleichungen

Einleitung

Inhalt dieses ersten Teils sind die Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen für ein Teilchengas, das durch eine Verteilungsfunktion beschrieben wird, die isotrop im Impulsraum ist. Unter der Annahme, daß außer der Gravitationskraft keine äußeren Felder auf die Teilchen wirken, konnten Ehlers, Geren und Sachs [8] 1968 zeigen, daß die Robertson-Walker-Metrik die einzige nichtstationäre Metrik ist, die mit diesem System verträglich ist. Die Zeitentwicklung wird dabei durch die Friedmann-Lösungen beschrieben.
Gerade für die Kosmologie, in der die Robertson-Walker-Metrik die Grundlage des Standardmodells darstellt, ist dieses ein hochinteressantes Resultat. Die Homogenität des Raumes muß nämlich wie in Kapitel 3 beschrieben normalerweise vorausgesetzt werden und hat eher den Status eines weltanschaulichen Prinzips.
Seit dieser Zeit ist keine ähnlich geschlossene Argumentation mehr gefunden worden, die ein analoges Ergebnis zum Inhalt hätte (für mathematische Teilaussagen siehe [1] und [2]).
In Kapitel 4 wird die Argumentation von Ehlers, Geren und Sachs, im folgenden mit EGS bezeichnet, ausführlich erläutert. Für die Untersuchung der Lösungen der Liouville-Gleichung habe ich mich allerdings an der Arbeit von Tauber und Weinberg [35] orientiert. Ihre Art der Argumentation läßt sich leichter verallgemeinern und enthält bereits den Fall des elektromagnetischen Feldes. Der Fall, daß die betrachteten Teilchen eine verschwindende Ruhemasse haben, wurde dort zwar ausgeschlossen, die Argumentation ließ sich aber leicht diesbezüglich verallgemeinern. Da die vollständige Lösung aber erst in EGS (und außerdem in viel kompakterer Form als in Tauber und Weinberg) vorgestellt wurde, werden auch diese Betrachtungen in den späteren Kapiteln der Einfachheit halber als die von EGS bezeichnet.
Im Kapitel 5 soll dann untersucht werden, welche Änderungen sich für die Lösungen der Liouville-Gleichung ergeben, wenn sich die Teilchen nicht mehr auf Geodäten bewegen, sondern einem äußeren Feld unterworfen sind. Diese Frage wurde von den Autoren nicht untersucht. Zunächst wird dabei der Einfluß eines elektromagnetischen Feldes (der wie gesagt schon in [35] behandelt wurde) erläutert. In Abschnitt 5.2 wird dann die Bewegungsgleichung $\frac{dp^a}{ds} = -\Gamma^a_{bc} p^b p^c + H^a$ untersucht, wobei $H^a = H^a(x^b)$ nicht von den Teilchenimpulsen p^a abhängen soll. Wie man dort sehen wird, ergeben sich unter diesen Annahmen zwar ähnliche Einschränkungen für die kinematischen Größen, vor allem im zweiten Fall können aber viele (Zwischen-) Ergebnisse von EGS nicht mehr aufrecht erhalten werden.
Schließlich erfolgt im 6. Kapitel die Untersuchung des Einflusses eines äußeren Feldes auf die Auswertung der Feldgleichungen. Neben dem Fall des elektromagnetischen Feldes, in dem eine Vereinfachung der Feldgleichungen nach dem Schema von EGS nicht mehr möglich ist, soll vor allem ein Skalarfeld untersucht werden, das sich nicht direkt in den Bewegungsgleichungen der Teilchen niederschlägt, wohl aber in den Feldgleichungen. Hier lassen sich unter gewissen Annahmen zu EGS analoge Schlußfolgerungen treffen. Für das anschließend untersuchte Skalarfeld, das direkt an die Materie (in Form des Energie-Impuls-Tensors) ankoppelt, lassen sich Aussagen dieser Art nur unter sehr starken Annahmen gewinnen. Im abschließend behandelten Fall der Brans-Dicke-Theorie machen die komplizierten Feldgleichungen schließlich eine Argumentation im Sinne von EGS unmöglich.

4. Isotrope Lösungen der Einstein-Liouville-Gleichungen

4.1 Der grundlegende Rahmen

Im Rahmen der allgemeinrelativistischen Kinetischen Theorie soll eine Materieverteilung betrachtet werden, die durch eine Verteilungsfunktion $f = f(x,p)$ beschrieben wird. Der Energie-Impuls-Tensor der Materie ergibt sich wie in Abschnitt 2.2 beschrieben aus

$$T^{ab} = \int p^a p^b f(x,p)\, \pi_m \ , \tag{4.1}$$

wobei

$$p^a = \frac{dx^a}{ds}$$

der Viererimpuls der Teilchen auf den Weltlinien $x^a(s)$ und π_m das Volumenelement der dreidimensionalen Massenschale $p_a p^a = -m^2 = const.$ ist. Für $m \neq 0$ entspricht $m\,s$ der Eigenzeit.
Als Vereinfachung wird angenommen, daß alle Teilchen die gleiche Masse haben. Dieses bedeutet aber keine Einschränkung der Allgemeinheit der Ergebnisse, da man ein System immer in solche Untersysteme aufteilen kann.
Außerdem sollen die Teilchen kollisionsfrei sein, oder es soll ein Stoßgleichgewicht herrschen, so daß die Liouville-Gleichung gilt:

$$f(x,p) = const. \quad \text{entlang der Weltlinien, d.h.}$$

$$\frac{df}{ds} = f_{,a} p^a + \frac{\partial f}{\partial p^a}\frac{dp^a}{ds} = 0 \ . \tag{4.2}$$

In der Kosmologie entsprechen diesen Fällen die wichtigen Staub- und Strahlungsuniversen.
Außer dem Gravitationsfeld, das gemäß der Einsteinschen Gravitationstheorie von den Teilchen selbst erzeugt wird, sollen ferner keine äußeren Kräfte wirken. Die Teilchen bewegen sich daher auf Geodäten:

$$\frac{dp^a}{ds} = -\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c \ . \tag{4.3}$$

In späteren Kapiteln werden mögliche Verallgemeinerungen dieser Annahme betrachtet.
Schließlich soll die Verteilungsfunktion lokal isotrop im Impulsraum in dem folgenden Sinne sein: Es gibt ein zeitartiges zukunftsgerichtetes Vektorfeld u^a (ein „Beobachterfeld“) mit $u_a u^a = -1$, so daß f die Form

$$f = f(x, -u_a p^a) \tag{4.4}$$

hat. Dabei läßt sich $E = -u_a p^a$ als die Energie der Teilchen interpretieren, die im durch u^a spezifizierten Bezugssystem gemessen wird. Im Fall des statistischen Gleichgewichts ist diese Bedingung automatisch erfüllt. Dieses Vektorfeld ist zunächst unabhängig von den Viererimpulsen p^a der Teilchen, insbesondere sind sie i.a. nicht parallel zueinander.
Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll, folgt aus diesen Annahmen, daß die resultierende Metrik Robertson-Walker-Form hat oder stationär ist.

4.2 Isotrope Lösungen der Liouville-Gleichung

Aus physikalischen Gründen kann man $f(x,E) > 0$ und $f(x,E) \to 0$ für $E \to \infty$ annehmen. In einem Intervall ist daher $\frac{\partial}{\partial E} f \neq 0$, so daß man eine Funktion $E = g(x,F)$ definieren kann. Dabei soll $F = f(x,E)$ als unabhängige Variable behandelt werden.
Aus der Liouville-Gleichung folgt somit

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dg(x,F)}{ds} = g_{,a}p^a + \frac{\partial g}{\partial F}\frac{dF}{ds} = g_{,a}p^a \ .$$

Andererseits ist

$$\frac{dE}{ds} = \frac{d(-u_a\, p^a)}{ds} = -(u_{a,b}\, p^b)\, p^a - u_a\, (-\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c) = -u_{a;b}\, p^a p^b \ ,$$

so daß

$$g_{,a}\, p^a = -u_{a;b}\, p^a p^b \tag{4.5}$$

gilt. Die Größe $u_{a;b}$ läßt sich dabei wie in Abschnitt 2.3 beschrieben in invarianter Weise zerlegen. Für diese kinematischen Größen ergeben sich nun aus der obigen Gleichung starke Einschränkungen. Wie unten gezeigt wird, kann man folgende Aussagen treffen:

- Die Scherung muß verschwinden:
$$\sigma_{ab} = 0 \ .$$

- Mit einem Skalar $q \neq 0$ gilt
$$\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\, u_a = (\ln q)_{,a} \ .$$
Daraus kann man (wegen $\sigma_{ab} = 0$)
$$\xi_{(a;b)} = \frac{1}{3} q\, \theta\, g_{ab} \ , \quad \xi_a := q\, u_a$$
folgern. Die Weltlinien sind also die Orbits einer durch ξ_a erzeugten Gruppe von konformen Abbildungen der Raumzeit in sich selbst. Wenn $\theta = 0$ ist, ist ξ_a ein zeitartiger Killing-Vektor, und die Abbildungen sind Isometrien.

- Die Expansion und die Rotation können nicht beide ungleich 0 sein , wenn $m \neq 0$ ist:
$$\theta\, \omega_{ab} = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq 0 \ .$$
Aus den Feldgleichungen kann man später ableiten, daß diese Beziehung auch für $m = 0$ gilt.

Entscheidend ist dabei, daß sich die Metrik für den Fall $\omega_{ab} = 0$ wegen $\sigma_{ab} = 0$ und $\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\, u_a = (\ln q)_{,a}$, was wie gesagt aus der Liouville-Gleichung folgt, nach dem Lemma 3 aus Abschnitt A.4 in der Form

$$ds^2 = q^2(-dt^2 + d\sigma^2)\,, \quad d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu dx^\nu \tag{4.6}$$

schreiben läßt. Das Vektorfeld u^a hat in dem mitbewegten Koordinatensystem die Form

$$u^a = q^{-1}\delta^a_0 \ . \tag{4.7}$$

Der Beweis für die behaupteten Eigenschaften der kinematischen Größen soll nun angetreten werden. Die kovariante Differentiation in u^a-Richtung wird dabei durch einen Punkt abgekürzt, z.B. $\dot{p}^a := p^a{}_{;b}u^b$.

Zunächst zerlegt man p^a in Anteile parallel und senkrecht zum Beobachterfeld u^a:

$$p^a = g\,u^a + \tilde{g}\,e^a\ , \quad e^a u_a = 0\ ,\ e^a\,e_a = 1\ .$$

Wegen $p_a p^a = -m^2$ ist dabei $\tilde{g} = \sqrt{g^2 - m^2}$. Aus Gleichung (4.5) folgt somit

$$\begin{aligned} g\dot{g} + \tilde{g} g_{,a} e^a &= -(g\dot{u}_a + \tilde{g}\,(\omega_{ab} + \sigma_{ab})\,e^b + \frac{1}{3}\,\tilde{g}\,\theta\,e_a)\,p^a \\ &= -g\tilde{g}\,\dot{u}_a e^a - \tilde{g}^2 \sigma_{ab} e^a e^b - \frac{1}{3}\tilde{g}^2\theta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{g}^2\,\sigma_{ab} e^a e^b + \tilde{g}\,(g\dot{u}_a + g_{,a})\,e^a + g\dot{g} + \tilde{g}^2\frac{\theta}{3} = 0\ .$$

Da diese Gleichung für alle Richtungen von e^a gilt, folgt

$$\sigma_{ab} = 0 \tag{4.8}$$

$$g\,\dot{u}_a + g_{,a} = \alpha\,u_a \tag{4.9}$$

$$\frac{1}{3}\theta = \frac{-g\dot{g}}{g^2 - m^2}\ . \tag{4.10}$$

mit einem Skalar α. Das Verschwinden von σ_{ab} resultiert dabei aus $\sigma_{ab}u^a = \sigma_{ab}u^b = 0$. Aus (4.9) folgt durch Überschieben mit u^a, daß $\alpha = -\dot{g}$ ist, womit wegen (4.10) $g^2\dot{u}_a + gg_{,a} = (g^2 - m^2)\,\frac{1}{3}\theta\,u_a$ folgt. Das ist äquivalent zu

$$(g^2)_{,a} = g^2 A_a + m^2 B_a\ , \tag{4.11}$$

$$A_a := -2\,(\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\,u_a)\ , \quad B_a := -\frac{2}{3}\theta\,u_a\ .$$

Bildet man von diesem Ausdruck die Rotation, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (g^2 A_{[a})_{;b]} + m^2 B_{[a;b]} \\ &= g^2 A_{[a;b]} + A_{[a}(g^2 A_{b]} + m^2 B_{b]}) + m^2 B_{[a;b]} \\ &= g^2 A_{[a;b]} + m^2 (A_{[a} B_{b]} + B_{[a;b]})\ . \end{aligned}$$

Da in dieser Gleichung nur g von F abhängt, müssen beide Terme verschwinden:

$$A_{[a;b]} = 0\ , \tag{4.12}$$

$$B_{[a;b]} + A_{[a} B_{b]} = 0 \quad \text{für} \quad m \neq 0\ . \tag{4.13}$$

Man kann also A_a als Gradient eines Skalars ausdrücken:

$$A_a = \ln(q^{-2})_{,a}\ .$$

Dabei ist q ein beliebiger positiver Skalar. Aus der Definition von A_a folgt

$$\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\,u_a = (\ln q)_{,a}\ . \tag{4.14}$$

Durch Überschieben mit u^a erhält man

$$\theta = 3\,\frac{\dot{q}}{q}\ , \quad \dot{u}_a = \frac{q_{,b}}{q}\,h_a^b\ .$$

Setzt man (4.14) in $u_{(a;b)} = -\dot{u}_{(a}u_{b)} + \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ (was wegen $\sigma_{ab} = 0$ gilt) ein, ergibt sich

$$u_{(a;b)} = -\frac{1}{3}\theta\,u_a u_b - \frac{1}{q}q_{,(a}u_{b)} + \frac{1}{3}\theta\,h_{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad q\, u_{(a;b)} + q_{,(b} u_{a)} = \frac{1}{3} q \theta\, g_{ab} \,.$$

Mit dem Vektorfeld

$$\xi_a := q\, u_a$$

gilt deshalb

$$\xi_{(a;b)} = \lambda\, g_{ab} \,, \quad \lambda := \frac{1}{3} q\, \theta = \dot{q} \,. \tag{4.15}$$

Für den Fall $m \neq 0$ folgt aus (4.13) wegen $B_a = -\frac{2\lambda}{q} u_a$ und $A_a = -\frac{2q_{,a}}{q}$

$$\begin{aligned} 0 &= B_{[a;b]} + A_{[a} B_{b]} \\ &= -2\,(\frac{\lambda}{q} u_{[a})_{;b]} + 4\lambda \frac{1}{q^2}\, q_{,[a} u_{b]} \\ &= -2 q^{-2} (q \lambda u_{[a})_{;b]} \,, \end{aligned}$$

wie man durch einfaches Differenzieren nachrechnen kann. Somit gilt

$$0 = (\lambda\, q\, u_{[a})_{;b]} \qquad (m \neq 0) \,. \tag{4.16}$$

Überschieben mit $h^a_c h^b_d$ liefert (wegen $h^a_b u_a = 0$ und $\omega_{ab} := h^c_a h^d_b u_{[c;d]}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda q\, h^a_c h^b_d u_{[a;b]} \\ &= \frac{1}{3} q^2 \theta\, \omega_{cd} \,, \end{aligned}$$

woraus die Beziehung

$$\theta\, \omega_{ab} = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq 0 \tag{4.17}$$

resultiert.
Nachdem diese Aussagen über die kinematischen Größen gewonnen werden konnten, soll nun gezeigt werden, daß man eine Erhaltungsgröße konstruieren kann, durch die sich die Verteilungsfunktion f ausdrücken läßt. Außerdem kann man gewisse Aussagen über die funktionale Form des konformen Faktors q gewinnen, die für das weitere Vorgehen wichtig sind.

Wegen Gleichung (4.16) läßt sich zunächst $\lambda q\, u_a$ für $m \neq 0$ als Gradient eines beliebigen Skalars schreiben:

$$\lambda\, q\, u_a = \frac{1}{2}\, k_{,a} \qquad (m \neq 0) \,. \tag{4.18}$$

Damit hat B_a für $m \neq 0$ die Form $B_a = -q^{-2}\, k_{,a}$, und Gleichung (4.11) wird zu

$$(g^2)_{,a} = -2 g^2 \frac{q_{,a}}{q} - \frac{m^2}{q^2} k_{,a} \,.$$

Diese Gleichung hat auch für $m = 0$ Bestand, da dann der zweite Term verschwindet (vergl. (4.11)). Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= q^2 (g^2)_{,a} + g^2 2 q q_{,a} + m^2 k_{,a} \\ \Leftrightarrow \quad & (g^2 q^2 + m^2 k)_{,a} = 0 \,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dieser Ausdruck hängt also von F, nicht aber von x^a ab, so daß die Verteilungsfunktion die Form

$$f = f(\, q^2 E^2 + m^2 k\,) = f(\, (\xi_a p^a)^2 + m^2 k\,) \tag{4.20}$$

haben muß. Der Term $q^2 E^2 + m^2 k$ ist also eine Erhaltungsgröße.
Für die weitere Argumentation muß man eine Fallunterscheidung treffen.

$\underline{\theta = 0}$

Wegen $\theta = 3\frac{\dot{q}}{q}$ resultiert in diesem Fall zunächst aus Gleichung (4.15)

$$\dot{q} = 0 \,, \quad \xi_{(a;b)} = 0 \,.$$

Der Vektor $\xi_a = q\, u_a$ ist also ein Killing-Vektor. Da er zudem noch zeitartig ist, muß die Metrik stationär sein, im Falle $\omega_{ab} = 0$ sogar statisch (siehe Abschnitt 1.3).
Für $m = 0$ impliziert Gleichung (4.19) außerdem

$$(g^2 q^2)_{,a} = 0 \,.$$

Dies ergibt sich aber auch im Fall $m \neq 0$, da k konstant ist:

$$\frac{1}{2} k_{,a} = \lambda\, q\, u_a = \frac{1}{3} q^2 \theta\, u_a = 0 \,.$$

Damit gilt

$$f = f(q^2\, E^2) \,. \tag{4.21}$$

$\underline{\theta \neq 0,\ m = 0}$

In diesem Fall erhält man die gleiche Erhaltungsgröße wie für $\theta = 0$. Aus (4.19) folgt nämlich

$$(g^2 q^2)_{,a} = 0$$

und so

$$f = f(q^2\, E^2) \,.$$

Für $\omega_{ab} = 0$ läßt sich die Metrik konform zerlegen, weitere Aussagen über q kann man hier aber nicht machen.

$\underline{\theta \neq 0,\ m \neq 0}$

Gleichung (4.17) impliziert zunächst $\omega_{ab} = 0$. Damit läßt sich die Metrik gemäß Gleichung (4.6) konform zerlegen. Insbesondere ist $u^a = q^{-1}\delta^a_0$. Wenn im folgenden von der Zeit oder von räumlichen Komponenten die Rede ist, so beziehen sie sich auf dieses ausgezeichnete Koordinatensystem.
Aus Gleichung (4.18) folgt somit $k = k(t)$. Durch Überschieben von (4.18) mit u^a gilt zudem $(\dot{q^2}) = -\dot{k}$, so daß man q^2 als

$$q^2 = A(x^\alpha) - k(t) \tag{4.22}$$

mit einer beliebigen Funktion A schreiben kann. Für die Metrik resultiert damit

$$G = (A(x^\alpha) - k(t))\,(-dt^2 + d\sigma^2) \tag{4.23}$$

und f hat die Form

$$f = f\Big(\,(A(x^\alpha) - k(t))^2 E^2 - m^2 k(t)\Big) \,. \tag{4.24}$$

Neben den weiter oben abgeleiteten Eigenschaften der kinematischen Größen konnte also in allen Fällen eine einfache funktionale Form für die Verteilungsfunktion angegeben werden. Im Fall $m\,\theta \neq 0$, in dem die Metrik konform zerlegbar ist, ließ sich der konforme Faktor außerdem auf die Form (4.22) einschränken, was für die weitere Argumentation entscheidend sein wird.

4.3 Lösungen der Feldgleichungen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Bedingungen an die Metrik aus der Feldgleichung $R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = \kappa T_{ab}$ folgen. Dabei soll vor allem der Fall $\theta \neq 0$ untersucht werden, da die Metrik sonst stationär und für die Kosmologie wenig interessant ist.
Wegen der Isotropie von f bezüglich u^a hat der Energie-Impuls-Tensor die Form einer idealen Flüssigkeit:

$$T^{ab} = \rho\, u^a u^b + P\, h^{ab}\ , \quad h^{ab} = g^{ab} + u^a u^b\ . \tag{4.25}$$

Für $m = 0$ erhält man wegen

$$T^a{}_a = \int p^a p_a\, f\, \pi_m = (-m^2) \int f\, \pi_m = 0$$

die Zustandsgleichung

$$P = \frac{1}{3}\rho\ .$$

Man kann nun mit Hilfe der Feldgleichungen zeigen, daß ein solcher Strahlungs - Energie-Impuls-Tensor unter der zusätzlichen Annahme $\sigma_{ab} = 0$, die hier als Folgerung der Liouville-Gleichung erfüllt ist, zu der Beziehung

$$\theta\, \omega_{ab} = 0$$

führt [36]. Für $m \neq 0$ folgte dies bereits aus der Liouville-Gleichung (Gleichung (4.17)). Der Beweis wird hier aber nicht vorgeführt, da er relativ lang und technisch ist.
Wenn die Expansion ungleich Null ist, was im folgenden angenommen werden soll, kann man somit

$$\omega_{ab} = 0$$

folgern, so daß sich die Metrik gemäß Gleichung (4.6) konform zerlegen läßt.

Nun macht man sich eine wichtige Eigenschaft des Vektorfeldes u^a zunutze. Aus der Feldgleichung folgt nämlich, daß u^a ein Eigenvektor des Ricci-Tensors ist, d.h. es gilt

$$u^a R_{a[b} u_{c]} = 0\ .$$

Aufgrund der Identität $u^a R_{a[b} u_{c]} = \theta_{,[b} u_{c]} + \text{Terme}(\omega_{bc}, \sigma_{bc})$, die sich aus $u_d R^d{}_{abc} = u_{a;[b;c]}$ (siehe Abschnitt 1.1) ergibt, kann man daher

$$\theta_{,[a} u_{b]} = 0$$

folgern, da σ_{ab} und ω_{ab} hier gleich 0 sind. Im mitbewegten Koordinatensystem ist ferner $u_a = -q\, \delta^0_a$, so daß θ nur von t abhängen kann. Wegen der aus (4.14) folgenden Beziehung $\theta(t) = 3\, (\ln q)_{,a}\, q^{-1} \delta^a_0 = -3\, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{q})$ folgt

$$q^2 = (B(x^\alpha) + C(t))^{-2} \tag{4.26}$$

mit beliebigen Funktionen B und C (die Beziehung zwischen C und θ ist hier nicht relevant).

Für $m \neq 0$ liefert der Vergleich mit (4.22), daß B oder C konstant sein muß. Wegen $\theta = \theta(t)$ kann man daher o.B.d.A. B gleich 0 setzen und erhält

$$q^2 = q^2(t) \qquad (m \neq 0)\ . \tag{4.27}$$

Daß dieses wichtige Teilergebnis auch für $m = 0$ resultiert, ist etwas schwieriger zu zeigen. Dazu wertet man zunächst die (aus der Bianchi-Identität folgende) Gleichung $T^{ab}{}_{;b} = 0$ für $P = \frac{1}{3}\rho$ aus:

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{4}{3}\rho\, u^a u^b + \frac{1}{3}\rho\, g^{ab})_{;b} \\ &= \frac{4}{3}\dot{\rho}\, u^a + \frac{4}{3}\rho\, (\dot{u}^a + u^a \theta) + \frac{1}{3}\rho^{,a}\ . \end{aligned}$$

Überschieben mit u_a liefert $-\frac{4}{3}\dot{\rho} - \frac{4}{3}\rho\theta + \frac{1}{3}\dot{\rho} = 0$ und damit $\dot{\rho} = -\frac{4}{3}\rho\theta$, womit gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}\rho\theta\, u^a + \rho\,(\dot{u}^a + u^a\theta) &= -\frac{1}{4}\rho^{,a} \\ \Leftrightarrow \quad \dot{u}^a - \frac{1}{3}\theta\, u^a &= -\frac{1}{4}\,(\ln\rho)^{,a}\,. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit (4.14) erhält man

$$\rho = q^{-4} = (B(x^\alpha) + C(t))^4\,. \tag{4.28}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung soll nun die mit $u^a u^b$ überschobene Feldgleichung $G_{ab}u^a u^b = \kappa\,\rho$ ausgenutzt werden. Wegen der konformen Zerlegbarkeit der Metrik kann man $u^a = q^{-1}\delta^a_0$ wählen und die Gleichung wird zu $G_{00}\,q^{-2} = \kappa\,\rho$. Für das Linienelement gilt $ds^2 = q^2\,\overline{ds^2}$, $\overline{ds^2} = -dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)\,dx^\mu dx^\nu$. Der Ricci-Tensor von $\overline{ds^2}$ hat dabei die Komponenten $\overline{R}_{00} = \overline{R}_{0\mu} = 0$, $\overline{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu}$, wobei $\tilde{R}_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor bezüglich $\gamma_{\mu\nu}$ ist. Mit Hilfe der Formeln aus Anhang A.4 erhält man somit

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{1}{2}\tilde{R} + 2(\ln q)_{,0,0} - 2(\ln q)_{,0}{}^2 + 2\,\left(-(\ln q)_{,0,0} + \gamma^{\mu\nu}(\ln q)_{,\mu,\nu}\right) + \Big(-(\ln q)_{,0}{}^2 + \\ &\quad + \gamma^{\mu\nu}(\ln q)_{,\mu}\,(\ln q)_{,\nu}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{R} - 3(\ln q)_{,0}{}^2 + 2\gamma^{\mu\nu}(\ln q)_{,\mu,\nu} + \gamma^{\mu\nu}(\ln q)_{,\mu}\,(\ln q)_{,\nu} \end{aligned}$$

und $G_{00}\,q^{-2} = \kappa\,\rho$ wird mit (4.27) und (4.28) zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\tilde{R} - 3\,(\frac{C_{,0}}{B+C})^2 - 2\gamma^{\mu\nu}(\frac{B_{,\mu,\nu}}{B+C} - \frac{B_{,\mu}B_{,\nu}}{(B+C)^2}) + \gamma^{\mu\nu}\frac{B_{,\mu}B_{,\nu}}{(B+C)^2}\right)(B+C)^2 &= \kappa\,(B+C)^4 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\tilde{R}\,(B+C)^2 - 3C_{,0}{}^2 - 2\gamma^{\mu\nu}B_{,\mu,\nu}\,(B+C) + 3\gamma^{\mu\nu}B_{,\mu}B_{,\nu} &= \kappa\,(B+C)^4\,. \end{aligned}$$

Mit der neuen Zeitkoordinate $\tau := C(t)$ und $F(\tau) := C_{,0}{}^2$ gilt damit

$$3F(\tau) = \frac{1}{2}\tilde{R}\,(B+\tau)^2 - 2\gamma^{\mu\nu}B_{,\mu,\nu}(B+\tau) + 3\gamma^{\mu\nu}B_{,\mu}B_{,\nu} - \kappa\,(B+\tau)^4\,.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung nur von τ abhängt, kann man einen Koeffizientenvergleich vornehmen. Insbesondere der Term $4B(x^\alpha)\,\tau^3$ auf der rechten Seite muß eine Funktion von τ sein. Daher ist B konstant und kann gleich 0 gesetzt werden. Damit wurde gezeigt, daß der konforme Faktor q auch im Fall $m = 0$ eine reine Funktion von t ist.

Mit einer Umdefinition der Zeitkoordinate erhält man also in jedem Fall die Metrik $ds^2 = -d\tilde{t}^2 + q(\tilde{t})^2\,d\sigma^2$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird ds^2 von nun an in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\,d\sigma^2\,, \quad d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)\,dx^\mu dx^\nu \tag{4.29}$$

geschrieben.
Wie man dem letzten Abschnitt entnehmen kann, hat die Verteilungsfunktion für $m \neq 0$ wegen $q(t)^2 = const. - k(t)$ (Gleichung (4.22) die Form $f = f(q^2E^2 - q^2m^2)$. Für $m = 0$ ist $f = f(q^2E^2)$. In beiden Fällen kann man f also als $f = f(q^2\,p_a p_b h^{ab})$ und somit als

$$f = f(\,a^2(t)\,\underline{p}^2\,)\,, \quad \underline{p}^2 := p_a p_b h^{ab} \tag{4.30}$$

schreiben. Wegen $T^{ab} = \int p^a p^b\,f\,\pi_m$ ist außerdem

$$\rho = \rho(t)\,, \quad P = P(t)\,.$$

Diese Form für die Verteilungsfunktion erhält man auch, wenn man die Robertson-Walker-Metrik voraussetzt und die Verteilungsfunktion in der in Anhang A.3 beschriebenen Weise daraus ableitet [7]. Diese Herangehensweise ist die Grundlage für den Teil II dieser Arbeit.

Die gefundene Formen für die Metrik und den Energie-Impuls-Tensor implizieren nun schon, daß ds^2 eine Robertson-Walker-Metrik sein muß, die durch die Friedmann-Zeitentwicklung charakterisiert ist. Dieses soll abschließend gezeigt werden.
Zu einer Metrik der Form (4.29) gehören die folgenden nichtverschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors, wie man z.B. mit Hilfe der Formeln aus Anhang A.4 nachrechnen kann:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\,\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}\,(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\ . \end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu}(x^\alpha)$ der Riccitensor bezüglich $\gamma_{\mu\nu}$. Die Feldgleichungen in der Form $R_{ab} = \kappa\,(T_{ab} - \frac{1}{2}T^c{}_c\,g_{ab})$ lauten somit

$$\begin{aligned} -3\,\frac{\ddot{a}}{a} &= \kappa\,(T_{00} + \frac{1}{2}T^c{}_c) \\ \tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) &= \kappa\,(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^c{}_c\,a^2\gamma_{\mu\nu})\ . \end{aligned}$$

Setzt man $T_{00} = \rho$, $T_{\mu\nu} = P\,a^2\gamma_{\mu\nu}$, $T^c{}_c = 3\,P - \rho$ (alles direkte Folgerungen aus der Form (4.25) von T^{ab}) in die obigen Gleichungen ein, erhält man

$$-3\,\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{2}\,(3\,P + \rho) \tag{4.31}$$

und

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}K(t) = 0\ , \tag{4.32}$$

$$K(t) := a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \frac{\kappa}{2}a^2(P - \rho)\ .$$

Da $\tilde{R}_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ nur von den Raumkoordinaten x^α abhängen und K nur von t, muß K konstant sein. Der durch $\tilde{R}_{\mu\nu}$ beschriebene dreidimensionale Raum ist damit ein Raum konstanter Krümmung[1] (in drei Dimensionen ist $\tilde{R}_{\alpha\mu\nu\sigma}$ eindeutig durch $\tilde{R}_{\mu\nu}$ bestimmt), d.h.

$$\tilde{R}_{\alpha\mu\nu\sigma} = k\,(\gamma_{\mu\sigma}\gamma_{\alpha\nu} - \gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\sigma})$$

mit $k := -\frac{1}{2}K$, wobei k die Werte $-1, 0, 1$ annehmen kann (nach Umskalierung von a). Damit ist ds^2 eine Robertson-Walker-Metrik:

$$G = -dt^2 + a(t)^2\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \frac{1}{4}k\,r^2)^2}$$

mit $r^2 := x^2 + y^2 + z^2$.
Betrachtet man die Argumentation für den Fall $m = 0$, so zeigt sich, daß diese Form für die Metrik unter den Annahmen $T^{ab} = \frac{4}{3}\rho\,u^a u^b + \frac{1}{3}\rho\,g^{ab}$ und $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0$ unabhängig von Modellvorstellungen der Kinetischen Theorie resultiert. Sowohl bei der Herleitung von Gleichung (4.28) als auch bei der Bestimmung der Form der Metrik wurden nämlich nur die Feldgleichungen ausgenutzt.
Schließlich soll die Zeitentwicklung des Systems untersucht werden.

[1] In Abschnitt 3.1 wurde ein solcher Raum etwas genauer beschrieben.

Die Energiedichte ρ und der Druck P lassen sich über $T^{ab} = \int p^a p^b f \pi_m$ durch die Verteilungsfunktion $f = f(a(t)^2\, \underline{p}^2)$ ausdrücken. Dazu benutzt man das Volumenelement in orthonormalen Koordinaten[2] mit $p_1 = |\underline{p}| \sin\theta \sin\varphi$, $p_2 = |\underline{p}| \sin\theta \cos\varphi$, $p_3 = |\underline{p}| \cos\theta$ [7] :

$$\pi_m = \underline{p}^2\, (m^2 + \underline{p}^2)^{-\frac{1}{2}}\, d|\underline{p}|\ \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\ .$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\rho &= T_{ab}\, u^a u^b \\
&= \int (m^2 + \underline{p}^2)\, f(a^2 \underline{p}^2)\, \pi_m \\
&= \int_0^\infty (m^2 + \underline{p}^2)^{\frac{1}{2}}\, \underline{p}^2\, f(a^2 \underline{p}^2)\, d|\underline{p}| \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 4\pi\, a^{-4} \int_0^\infty (a^2 m^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}\, u^2 f(u^2)\, du
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{3}\, (T^a{}_a + \rho) \\
&= \frac{1}{3} \int (-m^2)\, f(a^2 \underline{p}^2)\, \pi_m + \frac{1}{3}\, \rho \\
&= -\frac{4\pi}{3} m^2 a^{-2} \int_0^\infty (a^2 m^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}}\, u^2 f(u^2)\, du + \frac{1}{3}\, \rho \\
&= \frac{4\pi}{3} a^{-4} \int_0^\infty (a^2 m^2 + u^2)^{-\frac{1}{2}} u^4 f(u^2)\, du\ .
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnen kann, folgt aus diesen Beziehungen

$$(\rho a^3)^{\cdot} + P (a^3)^{\cdot} = 0\ . \tag{4.33}$$

Diese Gleichung ist schon aus Abschnitt 3.2 bekannt.
Einsetzen von (4.31) in den Ausdruck für $K = -2k$ liefert

$$-2k = -a \frac{1}{3} a \frac{\kappa}{2}\, (3P + \rho) + 2\dot{a}^2 + \frac{\kappa}{2} a^2 (P - \rho)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad 2\dot{a}^2 + 2k &= \frac{2}{3} \kappa\, \rho\, a^2 \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{\kappa}{3}\, \rho\ .
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung (4.33) liegt also das aus Abschnitt 3.2 bekannte Differentialgleichungs-System vor, das zu den Friedmann-Lösungen führt. Wenn die genaue Form der Verteilungsfunktion bekannt ist, kann man die Energiedichte und den Druck wie oben gezeigt aus ihr berechnen und so die Zeitentwicklung von $a(t)$ vollständig festlegen. Die Zustandsgleichung, die ρ und P miteinander in Beziehung setzt, muß hier also nicht vorausgesetzt werden, sondern kann mit Hilfe der Verteilungsfunktion abgeleitet werden. Dieser Sachverhalt, der immer zutage tritt, wenn die Form der Verteilungsfunktion bekannt ist, unterstreicht ganz allgemein den Nutzen der Kinetischen Theorie.

[2] In diesen Koordinaten ist $g = -1$.

5. Lösungen der Liouville-Gleichung mit äußerem Feld

Die Annahme, daß sich die Teilchen auf Geodäten bewegen, soll nun fallengelassen werden. Alle folgenden Betrachtungen lassen aber zwei Grundannahmen von EGS unangetastet:

- lokale Isotropie der Verteilungsfunktion : $f = f(x, E) = f(x, -u_a\, p^a)$
- Liouville-Gleichung : $f = const.$ entlang der Weltlinien

Wenn diese Annahmen modifizieren würden, müßte man einen völlig neuen Argumentationsweg zur Bestimmung der Metrik konstruieren. Anscheinend kann man nämlich nur mit diesen Annahmen die kinematischen Parameter der Metrik so weit einschränken, daß man mit Hilfe des Lemmas 3 aus Anhang A.4 eine bestimmte funktionale Form für die Metrik angeben kann. Daß diese noch recht allgemeine Form nur mit den Feldgleichungen verträglich ist, wenn die Metrik eine Robertson-Walker-Metrik ist, ist ein weiterer Hinweis, daß der Beweis eines ähnlichen Ergebnisses unter allgemeineren Bedingungen ungleich schwerer ist und neue Beweistechniken erfordert. Tatsächlich gibt es seit der 1968 abgefassten Arbeit von EGS kein analoges Ergebnis, mit dem man von Eigenschaften der Verteilungsfunktion eindeutig auf die Form der Metrik schließen könnte.
Was allerdings modifiziert werden kann, sind die beiden folgenden Annahmen:

- Die durch die Verteilungsfunktion beschriebene Materie wird neben der Gravitationswechselwirkung durch kein äußeres Feld beeinflußt, d.h. die Teilchen bewegen sich auf Geodäten:
$$\frac{Dp^a}{Ds} = \frac{dp^a}{ds} + \Gamma^a_{bc}\, p^b p^c = 0\,.$$
Wegen der Isotropie bezüglich u^a hat daher der Energie-Impuls-Tensor die Form einer idealen Flüssigkeit:
$$T^{ab} = \rho\, u^a u^b + P h^{ab}\,.$$
- Metrik und Materie sind durch die Einsteinschen Feldgleichungen miteinander verbunden:
$$R^{ab} - \frac{1}{2} R\, g^{ab} = \kappa\, T^{ab}\,.$$

Vor allem eine mögliche Verallgemeinerung der ersten Annahme ist Inhalt der folgenden Abschnitte. In Abschnitt 6.4 wird kurz die Brans-Dicke-Theorie behandelt, in der andere Feldgleichungen vorliegen. Allerdings läßt sich auch dieser Fall auf die normale Einsteinsche Theorie mit einem zusätzlichen Skalarfeld zurückführen.
Zunächst soll es dabei um die Lösungen der Liouville-Gleichung gehen. Die Einschränkungen durch die Feldgleichungen sind dann Inhalt des darauffolgenden Kapitels.

5.1 Elektromagnetisches Feld

Hier soll untersucht werden, welche Folgerungen sich aus der Liouville-Gleichung für eine Verteilungsfunktion der Form $f = f(x, E) = f(x, -u_a p^a)$ gewinnen lassen, wenn die Materie neben der Gravitationswechselwirkung unter dem Einfluß eines äußeren elektromagnetischen Feldes steht. Für den Fall $m \neq 0$ wurde dies bereits in [35] gezeigt.
Die Bewegungsgleichung lautet hier

$$\frac{dp^a}{ds} = -\Gamma^a_{bc} p^b p^c + eF^a{}_b p^b \ . \tag{5.1}$$

Wie im vorigen Kapitel gilt für $E = g(x, F)$, $F = f(x, E)$ wegen der Liouville-Gleichung

$$\frac{dE}{ds} = g_{,a} p^a \ .$$

Die neue Bewegungsgleichung führt nun aber auf

$$\frac{dE}{ds} = -u_{a;b}\, p^a p^b - e\, u_a F^a{}_b p^b$$

und so zu

$$g_{,a}\, p^a = -u_{a;b}\, p^a p^b - e\, u_a F^a{}_b p^b \ . \tag{5.2}$$

Trotz des Auftretens des neuen Terms $eF^a{}_b u_a p^b$ ergeben sich die gleichen Einschränkungen für die kinematischen Größen, was nun gezeigt werden soll.

Mit $p^a = gu^a + \tilde{g} e^a$, $e^a u_a = 0$, $e^a e_a = 1$ erhält man aus (5.2) wegen $u_a F^a{}_b p^b = u_a F^a{}_b\, \tilde{g}\, e^b$, was aus $F^{(ab)} = 0$ folgt, die Gleichung

$$\tilde{g}^2\, \sigma_{ab} e^a e^b + \tilde{g}\, (g\dot{u}_a + g_{,a} + eF^b{}_a u_b)\, e^a + g\dot{g} + \tilde{g}^2 \frac{\theta}{3} = 0 \ .$$

Daraus folgt

$$\sigma_{ab} = 0 \ , \tag{5.3}$$

$$g\dot{u}_a + g_{,a} + F_a = \alpha\, u_a \ , \tag{5.4}$$

$$\frac{\theta}{3} = \frac{-g\dot{g}}{g^2 - m^2} \ . \tag{5.5}$$

mit $F_a := eF^b{}_a u_b$. Aus (5.4) folgt $-\alpha = \dot{g} = -\frac{g^2-m^2}{g}\frac{\theta}{3}$ und somit $g^2\dot{u}_a + gg_{,a} + gF_a = (g^2 - m^2)\,\frac{\theta}{3}\, u_a$, was äquivalent ist zu

$$(g^2)_{,a} = g^2 A_a + m^2 B_a - 2gF_a \ , \tag{5.6}$$

$$A_a := -2\,(\dot{u}_a - \frac{\theta}{3} u_a) \ , \quad B_a := -\frac{2}{3}\theta\, u_a \ .$$

Die Terme A_a und B_a sind wie in EGS definiert. Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= (g^2 A_{[a})_{;b]} + m^2 B_{[a;b]} - 2(gF_{[a})_{;b]} \\
&= g^2 A_{[a;b]} + A_{[a}(g^2 A_{b]} + m^2 B_{b]} - 2gF_{b]}) + m^2 B_{[a;b]} - 2gF_{[a;b]} \\
&\quad -2F_{[a}(\frac{1}{2} gA_{b]} + \frac{m^2}{2g} eB_{b]}) \\
&= g^2 A_{[a;b]} + m^2 (A_{[a} B_{b]} + B_{[a;b]}) - \frac{m^2}{g} F_{[a} B_{b]} - 2g\,(F_{[a;b]} + \frac{1}{2} A_{[a} F_{b]}) \ .
\end{aligned}$$

Da nur g von F abhängt (nicht zu verwechseln mit F_a), kann man einen Koeffizientenvergleich in g vornehmen und erhält

$$A_{[a;b]} = 0 \,, \tag{5.7}$$

$$A_{[a}B_{b]} + B_{[a;b]} = 0 \quad \text{für} \quad m \neq 0 \,, \tag{5.8}$$

$$F_{[a;b]} + \frac{1}{2} A_{[a}F_{b]} = 0 \,, \tag{5.9}$$

$$F_{[a}B_{b]} = 0 \quad \text{für} \quad m \neq 0 \,. \tag{5.10}$$

Neben den beiden neuen Gleichungen für F^a ergeben sich (5.7) und (5.8) also genauso wie im Abschnitt 4.2 . Wie dort gezeigt wurde, implizieren sie die Beziehungen

$$A_a = \ln(q^{-2})_{,a}$$

$$\dot{u_a} - \frac{1}{3}\theta\, u_a = (\ln q)_{,a} \,, \tag{5.11}$$

$$\xi_{(a;b)} = \dot{q}\, g_{ab} \,, \quad \xi_a := q\, u_a \tag{5.12}$$

$$\theta\, \omega_{ab} = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq 0 \,. \tag{5.13}$$

Auch die Einführung des Skalars k ergibt sich als Folgerung von Gleichung (5.8) wie im vorigen Kapitel, wenn $m \neq 0$ ist:

$$\dot{q}q\, u_a = \frac{1}{3}\theta\, q^2 u_a = \frac{1}{2}\, k_{,a} \qquad (m \neq 0) \,. \tag{5.14}$$

Damit hat B_a wieder die Form $B_a = -q^{-2}k_{,a}$ für $m \neq 0$.
Allerdings ist es i.a. nicht mehr möglich, eine Erhaltungsgröße zu konstruieren. Gleichung (5.6) ist nämlich nun äquivalent zu

$$\begin{aligned} (g^2)_{,a} &= -2g^2\frac{q_{,a}}{q} - \frac{m^2}{q^2}k_{,a} - 2gF_a \\ \Leftrightarrow \quad q^2(g^2)_{,a} &= -g^2(q^2)_{,a} - m^2 k_{,a} - 2gq^2F_a \\ \Leftrightarrow \quad (g^2q^2 + m^2k)_{,a} &= -2gq^2F_a \,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die rechte Seite läßt sich i.a. nicht als Gradient eines Skalars ausdrücken.

Die Gleichungen (5.9) und (5.10) liefern hier außerdem gewisse Einschränkungen für F_a. Aus (5.9) folgt

$$0 = F_{[a;b]} - \frac{1}{q}q_{,[a}F_{b]} = \frac{1}{q}(qF_{[a})_{;b]} \,.$$

Man kann somit qF_a als Gradient eines Skalars schreiben:

$$qF_a = Q_{,a} \,. \tag{5.16}$$

Aus (5.10) folgt für $m \neq 0$ ferner

$$0 = -\frac{1}{q^2}\, k_{,[a}F_{b]} = -\frac{1}{q^3}\, k_{,[a}(qF_{b]})$$

und so

$$k_{,[a}Q_{,b]} = 0 \qquad (m \neq 0) \,. \tag{5.17}$$

Auch hier muß für die weitere Argumentation eine Fallunterscheidung getroffen werden:

$\underline{\theta = 0}$

Wegen Gleichung (5.12) ist ξ^a für verschwindende Expansion ein zeitartiger Killing-Vektor. Die Metrik ist damit stationär.
Für $m \neq 0$ folgt aus (5.14), daß k konstant ist, so daß der Term $(m^2 k)_{,a}$ in Gleichung (5.15) auf jeden Fall verschwindet. Mit $qF_a = Q_{,a}$ gilt so

$$\begin{aligned} (g^2 q^2)_{,a} &= -2gq\, Q_{,a} \\ \Leftrightarrow \quad (gq + Q)_{,a} &= 0\,. \end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion resultiert damit

$$f = f(qE + Q)\,. \tag{5.18}$$

$\underline{\theta \neq 0,\ m = 0}$

Aus (5.15) folgt wie im Fall $\theta = 0$

$$(gq + Q)_{,a} = 0$$

und daher

$$f = f(qE + Q)\,.$$

$\underline{\theta \neq 0,\ m \neq 0}$

Wie bei EGS impliziert (5.13) $\omega_{ab} = 0$, so daß sich die Metrik konform zerlegen läßt. Auch die funktionale Form des konformen Faktors q ergibt sich aus (5.14) wegen $k = k(t)$ genauso als

$$q^2 = A(x^\alpha) - k(t)\,. \tag{5.19}$$

Gleichung (5.17) liefert außerdem $k_{,0} Q_{,\mu} = k_{,\mu} Q_{,0} = 0$. Da k wegen (5.14) nicht konstant ist, kann Q nur von der Zeit abhängen:

$$Q = Q(t)\,.$$

Zusammenfassend kann man also sagen, daß die Beziehungen für die kinematischen Größen auch bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes erhalten bleiben. Im Fall $\theta = 0$ oder $m = 0$ konnte die neue Erhaltungsgröße $qE + Q$ mit $qF_a = Q_{,a}$ formuliert werden. Dieses gelingt im Fall $\theta \neq 0$, $m \neq 0$ i.a. aber nicht. Die Form (5.19) für den konformen Faktor q resultiert aber in diesem Fall wie bei EGS.

5.2 p^a - unabhängiges äußeres Feld

In diesem Abschnitt soll ein äußeres Feld betrachtet werden, das zu der Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^a}{ds} = -\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c + H^a \tag{5.20}$$

führt, wobei $H^a = H^a(x^b)$ nicht von den Teilchenimpulsen p^a abhängen soll. Das elektromagnetische Feld erfüllt diese Bedingung offensichtlich nicht.
Hier taucht nun das Problem auf, daß die durch $m = \sqrt{-p_a p^a}$ definierte Masse i.a. nicht mehr auf den Weltlinien konstant ist:

$$\begin{aligned} \frac{dm^2}{ds} &= p^a(-p_b p^b)_{,a} + (H^a - \Gamma^a_{bc}\, p^b p^c)\,\frac{\partial}{\partial p^a}(-p_d p^d) \\ &= -g_{bc,a}\, p^a p^b p^c - 2H^a p_a + 2\Gamma^a_{bc}\, p^b p^c p_a \\ &= -2H^a p_a\,. \end{aligned}$$

Da man aber von der Ruhemasse diese Eigenschaft erwartet, soll der Ansatz

$$p^a = P^a + h\, r^a \ , \quad r^a P_a = 0 \ , \ r^a r_a = 1$$

gemacht und $m_0 := \sqrt{-P_a P^a}$ als Ruhemasse interpretiert werden. Dabei soll $h = h(x^a)$ nicht explizit von p^a abhängen. Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d{m_0}^2}{ds} &= \frac{d}{ds}(m^2 + h^2) \\ &= -2H^a p_a + p^a (h^2)_{,a} \ . \end{aligned}$$

Wenn die Ruhemasse auf den Weltlinien konstant sein soll, muß daher

$$(h^2)_{,a}\, p^a = 2H_a p^a \tag{5.21}$$

gelten. Man erhält also eine direkte Beziehung zwischen h und H^a, kann aber h nicht eindeutig aus H^a gewinnen.
Zunächst verläuft die Argumentation aber bis auf einen Zusatzterm wie in EGS. Die Verteilungsfunktion hat die Form $f = f(x, -u_a p^a)$ und mit $E := -u_a p^a = g(x, F)$ resultiert wegen $\frac{dE}{ds} = -u_{a;b}\, p^a p^b - u_a H^a$ die Gleichung

$$g_{,a}\, p^a = -u_{a;b}\, p^a p^b - H^a u_a \ .$$

Analog zu EGS erhält man damit ($p^a = g u^a + \tilde{g} e^a$)

$$\tilde{g}^2\, \sigma_{ab} e^a e^a + \tilde{g}\, (g \dot{u}_a + g_{,a})\, e^a + H^a u_a + g\dot{g} + \tilde{g}^2 \frac{\theta}{3} = 0$$

und mit der Abkürzung $H := H^a u_a$

$$\begin{aligned} \sigma_{ab} &= 0 \\ g\dot{u}_a + g_{,a} &= \alpha\, u_a \\ \frac{1}{3}\theta &= -\frac{g\dot{g} + H}{g^2 - m^2} \ . \end{aligned}$$

Aus $-\alpha = \dot{g}$ ergibt sich nun $g^2 \dot{u}_a + g g_{,a} = (g^2 - m^2)\frac{1}{3}\theta\, u_a - H u_a$, womit

$$(g^2)_{,a} = g^2 A_a + m^2 B_a + C_a \ , \tag{5.22}$$

$$A_a := -2\,(\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\, u_a) \ , \quad B_a := -\frac{2}{3}\theta\, u_a \ , \quad C_a := -2H u_a \ .$$

folgt. Für die Definition von A_a und B_a ergeben sich also keine Änderungen. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (g^2 A_{[a})_{;b]} + m^2 B_{[a;b]} + C_{[a;b]} \\ &= g^2 A_{[a;b]} + A_{[a}(g^2 A_{b]} + m^2 B_{b]} + C_{b]}) + m^2 B_{[a;b]} + C_{[a;b]} \\ &= g^2 A_{[a;b]} + m^2 (A_{[a} B_{b]} + B_{[a;b]}) + A_{[a} C_{b]} + C_{[a;b]} \end{aligned}$$

und somit wegen $g = g(x, F)$ ($m^2 = {m_0}^2 + h^2$ hängt nicht von F ab)

$$A_{[a;b]} = 0 \tag{5.23}$$

$$m^2 (A_{[a} B_{b]} + B_{[a;b]}) + A_{[a} C_{b]} + C_{[a;b]} = 0 \ . \tag{5.24}$$

Die erste Beziehung liefert wie in EGS

$$A_a = \ln(q^{-2})_{,a} \ ,$$

woraus

$$\dot{u_a} - \frac{1}{3}\theta\, u_a = (\ln q)_{,a}$$

und mit $\xi_a := q\, u_a$

$$\xi_{(a;b)} = \lambda\, g_{ab}\ , \quad \lambda = \frac{1}{3} q\, \theta = \dot{q} \tag{5.25}$$

resultiert, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde. Auch die Beziehung

$$A_{[a}B_{b]} + B_{[a;b]} = -2q^{-2}(\lambda q u_{[a})_{;b]}$$

wurde dort abgeleitet. Zusammen mit

$$\begin{aligned} A_{[a}C_{b]} + C_{[a;b]} &= 4Hq^{-1}q_{,[a}u_{b]} - 2(Hu_{[a})_{;b]} \\ &= q^{-2}\left(2H(q^2)_{,[a}u_{b]} - 2q^2(H\,u_{[a})_{;b]}\right) \\ &= -2q^{-2}(q^2 H u_{[a})_{;b]}\ . \end{aligned}$$

erhält man

$$m^2(\lambda q\, u_{[a})_{;b]} + (q^2 H\, u_{[a})_{;b]} = 0\ . \tag{5.26}$$

Formt man diese Gleichung nach

$$m^2(\lambda q)_{,[b}u_{a]} + (q^2 H)_{,[b}u_{a]} + (m^2\lambda\, q + q^2 H)u_{[a;b]} = 0$$

um und überschiebt mit $h^a_c h^a_d$, dann resultiert die Beziehung

$$(m^2\theta + 3H)\,\omega_{cd} = 0\ . \tag{5.27}$$

Interessanterweise kann die Rotation also nur ungleich 0 sein, wenn $m^2\theta = -3H$ ist, im Fall $m\,\theta = 0$ und $H \neq 0$ muß sie zum Beispiel verschwinden.
Da m^2 aber nicht mehr als konstant angesehen werden darf, läßt sich $q^2\,(m^2 B_a + C_a)$ trotz Gleichung (5.26) i.a. nicht als Gradient eines Skalars schreiben:

$$\begin{aligned} (q^2 m^2 B_{[a} + q^2 C_{[a})_{;b]} &= -2q^2\frac{\lambda}{q}\, u_{[a}(m^2)_{,b]} - 2m^2(\lambda q\, u_{[a})_{;b]} + (q^2 H\, u_{[a})_{;b]} \\ &= -2q\dot{q}\, u_{[a}(m^2)_{,b]}\ . \end{aligned}$$

Dieser Term verschwindet offensichtlich nur für $q = q(x^\alpha)$ oder für $m_{,a} \sim u_a$, d.h. $m = m(t)$, was zu $h = h(t)$ äquivalent ist. Setzt man dies voraus und kürzt $q^2(m^2 B_a + C_a)$ durch $-l_{,a}$ ab, d.h.

$$2\,(m^2 q\lambda + q^2 H)\, u_a = l_{,a}\ , \tag{5.28}$$

erhält man aus (5.22)

$$\begin{aligned} (g^2)_{,a} &= -g^2 2\frac{q_{,a}}{q} - q^{-2}\, l_{,a} \\ \Leftrightarrow \quad (g^2 q^2 + l)_{,a} &= 0\ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Diese Ergebnisse konnten aber nur unter der Bedingung $q = q(x^\alpha)$ oder $h = h(t)$ gefolgert werden. Wenn q nicht von t abhängt, ist ξ_a aber wegen (5.25) ein zeitartiger Killing-Vektor und die Metrik ist stationär. Daher ist vor allem der Fall $h = h(t)$ interessant.
Für die Weiterführung der Argumentation muß der Fall $m^2\theta + 3H = 0$ gesondert betrachtet werden.

$\underline{m^2\theta + 3H = 0}$

In diesem Fall liefert (5.28) $l = const.$ und daher

$$(g^2 q^2)_{,a} = 0 \, .$$

Die Verteilungsfunktion hat damit die Form

$$f = f(qE) \, .$$

In diesem Fall kann man aber nicht $\omega_{ab} = 0$ folgern.

$\underline{m^2\theta + 3H \neq 0}$

Wegen Gleichung (5.27) muß die Rotation verschwinden, und die Metrik läßt sich konform zerlegen.
Um weitere Aussagen treffen zu können, soll wieder angenommen werden, daß $h = h(t)$ oder $q = q(x^\alpha)$ gilt. Aus (5.28) folgt dann

$$l = l(t) \, ,$$

und für die Verteilungsfunktion kann man die Form

$$f = f(q^2 E^2 + l(t))$$

angeben. Durch Überschieben von Gleichung (5.28) mit u^a ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned} m^2 B_a u^a + C_a u^a &= -q^{-2} \, l_{,a} u^a \\ \Leftrightarrow \quad 2m^2 \frac{\dot{q}}{q} + 2H &= -q^{-2} \, \dot{l} \\ \Leftrightarrow \quad m(t)^2 \, (\dot{q^2}) + 2Hq^2 + \dot{l}(t) &= 0 \, . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Eine funktionale Form für q kann man hieraus nicht ohne weiteres gewinnen. Für den Fall $q = q(x^\alpha)$ ergibt sich offensichtlich

$$2Hq(x^\alpha)^2 + \dot{l}(t) = 0 \, ,$$

aber selbst diese Differentialgleichung läßt sich ohne weitere Kenntnisse von H nicht ausnutzen.

Auch für die in diesem Abschnitt untersuchte Bewegungsgleichung ergeben sich also zunächst die gleichen Einschränkungen für die kinematischen Größen wie in EGS, wobei die Beziehung $\theta \, \omega_{ab} = 0$ (für $m \neq 0$) durch Gleichung (5.27) abgelöst wird. Für die weitere Argumentation mußte aber die Annahme getroffen werden, daß $q = q(x^\alpha)$ oder $h = h(t)$ gilt. Der erste Fall führt zu einer stationären Metrik. Der zweite läßt sich nicht direkt an einer Bedingung für H festmachen, da die Größen nur über Gleichung (5.21) miteinander in Beziehung stehen. Mit dieser Annahme konnte dann zumindest eine Erhaltungsgröße und so eine funktionale Form für die Verteilungsfunktion gefunden werden. Anstelle einer funktionalen Form für den konformen Faktor erhält man aber nur die Differentialgleichung (5.30) für den Fall $m^2\theta + 3H \neq 0$. Wie im Abschnitt 6.3 und am Ende des Abschnitts 6.2 deutlich wird, läßt sie sich kaum für eine Vereinfachung der Feldgleichungen im Sinne von EGS verwenden.

6. Lösungen der Feldgleichungen mit äußerem Feld

Nun soll mit Hilfe der im letzten Kapitel gewonnenen Ergebnisse untersucht werden, wie die Auswertung der Feldgleichungen modifiziert werden muß, wenn äußere Felder zugelassen sind. Zwei Punkte sind dabei hervorzuheben. Eine Bewegungsgleichung $\frac{Dp^a}{Ds} = H^a$ führt i.a. zu anderen Beziehungen zwischen den kinematischen Größen als bei EGS. Die Fälle $H^a = eF^a{}_b p^b$ mit $F^{(ab)} = 0$ (elektromagnetisches Feld) und $H^a = H^a(x^b)$ (p^a - unabhängiges Feld) wurden bereits behandelt. In der Argumentation von EGS ist dabei nur der mit u_a überschobene Term $\frac{Dp^a}{Ds} u_a$ für die Ableitung der Beziehungen relevant. Eine Bewegungsgleichung in der obigen Form mit $H^a u_a = 0$ impliziert daher die gleichen Ergebnisse wie bei EGS.
Zum anderen ist die Tatsache, daß u^a ein Ricci-Eigenvektor ist ($u^a R_{a[b} u_{c]} = 0$) i.a. nicht mehr gegeben, wenn die Feldgleichungen neben dem Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit einen weiteren Materieterm enthalten oder die Einsteinschen Feldgleichungen gar nicht mehr gelten. Diese Eigenschaft ist aber notwendig, um $\theta = \theta(t)$ und so $q = (B(x^\alpha) + C(t))^{-1}$ folgern zu können, was für die Bestimmung der Metrik entscheidend ist.

6.1 Elektromagnetisches Feld

Die Materie-Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes lautet (siehe Anhang A.1)

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{-g}\,(-\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + e A_a u^a)\ ,$$

woraus

$$T_M{}^{ab} = F^{ac} F^b{}_c - \frac{1}{4}\, g^{ab} F_{cd} F^{cd}\ ,$$

$$F^{ab}{}_{;b} = e\, u^a$$

resultiert. Aus $T_M{}^{ab}{}_{;b} = eF^a{}_b p^b$ folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{Dp^a}{Ds} = eF^a{}_b\, p^b\ .$$

Man kann zeigen (Abschnitt 5.1), daß man ausgehend von dieser Bewegungsgleichung für $m\theta \neq 0$ zwar keine Erhaltungsgröße und so keine funktionale Form für die Verteilungsfunktion mehr finden kann, daß aber die Bedingungen an die kinematischen Größen und die Form der Metrik bestehen bleiben.
Allerdings ist u^a nun i.a. kein Ricci-Eigenvektor mehr:

$$u^c R_{c[a} u_{b]} = -u^c F_c{}^d F_{d[a} u_{b]}\ .$$

Wenn der Ausdruck verschwinden soll, muß in mitbewegten Koordinaten wegen $u^a \sim \delta^a_0$ die Gleichung $F_0{}^d F_{da} \sim \delta^0_a$ gelten. Ausgedrückt in den Feldern E_μ und B_μ des elektrischen bzw.

magnetischen Feldes ergeben sich so die folgenden Beziehungen, die aber wegen der Unkenntnis von $\gamma_{\mu\nu}$ keine direkte physikalische Interpretation haben:

$$q^{-2}\gamma^{\mu\nu}E_\mu E_\nu = const.$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu 2}E_\mu B_3 - \gamma^{\mu 3}E_\mu B_2 &= 0 \\
\gamma^{\mu 3}E_\mu B_1 - \gamma^{\mu 1}E_\mu B_3 &= 0 \\
\gamma^{\mu 1}E_\mu B_2 - \gamma^{\mu 2}E_\mu B_1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Für ein elektromagnetisches Strahlungsfeld mit ${T_M}^{ab} = \lambda^2 k^a k^b$ und $k_a k^a = 0$ ist die Gleichung $u^a R_{a[b}u_{c]} = \lambda^2 u^a k_a k_{[b}u_{c]} = 0$ wegen $u_a u^a = -1$ sogar nie zu erfüllen.

Selbst wenn man diese Bedingung voraussetzt und somit $\theta = \theta(t)$ und $q = (B(x^\alpha) + C(t))^{-1}$ erhält, läßt sich die Argumentation nicht analog zu EGS weiterführen. Für $m = 0$ resultiert wegen ${T_M}^{ab}{}_{;b} = eF^a{}_b p^b$ mit der analogen Rechnung von Abschnitt 4.2, die zu Gleichung (4.28) führte, die Beziehung

$$\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\, u_a = -\frac{1}{4}(\ln\rho)_{,a} - \frac{1}{4}e\,\rho^{-1}F_{ab}p^b\,.$$

Man kann daher ρ nicht wie bei EGS durch q ausdrücken.
Außerdem kann man selbst für $q = q(t)$, was im Fall $m \neq 0$ immer noch folgen würde, nicht mehr die Form $f = f(q(t)^2\underline{p}^2)$ für die Verteilungsfunktion und so $\rho = \rho(t)$, $P = P(t)$ ableiten. Dieses ist aber notwendig, um die Feldgleichungen vereinfachen zu können, in Gleichung (4.32) konnte so $K = const.$ gefolgert werden.

6.2 Skalarfeld

Hier soll ein Skalarfeld der folgenden Gestalt betrachtet werden :

$$L_M = \sqrt{-g}\,\Big(U(\varphi)\,\varphi_{,a}\varphi_{,b}\,g^{ab} - V(\varphi)\Big)\,.$$

Am Ende dieses Abschnitts wird untersucht, welche Änderungen sich ergeben, wenn V neben φ auch von $\varphi_{,a}$ abhängt.
Der Energie-Impuls-Tensor errechnet sich nach den Formeln von Anhang A.1 als

$$\begin{aligned}
{T_M}^{ab} &= g^{ab}(U\varphi_{,c}\varphi_{,d}\,g^{cd} - V) + 2\frac{\delta}{\delta g_{ab}}(U\varphi_{,c}\varphi_{,d}\,g^{cd} - V) \\
&= g^{ab}(U\varphi_{,c}\varphi^{,c} - V) - 2\,U\varphi^{,a}\varphi^{,b}
\end{aligned}$$

und die Feldgleichung für φ als

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\varphi}(U\varphi_{,a}\varphi_{,b}\,g^{ab} - V) - \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_{,c}}(U\varphi_{,a}\varphi_{,b}\,g^{ab} - V)\right)_{;c} \\
&= -\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,a}\varphi^{,a} - \frac{\partial V}{\partial\varphi} - 2\,U\,\Box\varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \Box\varphi + \frac{1}{2\,U}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,a}\varphi^{,a} + \frac{1}{2\,U}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0\,.
\end{aligned}$$

Als Bewegungsgleichung ergibt sich die Geodätengleichung :

$$\begin{aligned}
{T_M}^{ab}{}_{;b} &= (U\varphi_{,b}\varphi^{,b} - V)^{;a} - 2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,b}\,\varphi^{,a}\varphi^{,b} - 2\,U\varphi^{,a}{}_{;b}\varphi^{,b} - 2\,U\varphi^{,a}\,\Box\varphi \\
&= -\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi^{,a}\varphi_{,b}\varphi^{,b} - \frac{\partial V}{\partial\varphi}\varphi^{,a} - 2\,U\varphi^{,a}\left(-\frac{1}{2\,U}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,b}\varphi^{,b} - \frac{1}{2\,U}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Damit folgen zunächst einmal dieselben Ergebnisse wie bei EGS. Insbesondere muß die Rotation im Fall $m \neq 0$ verschwinden, wenn $\theta \neq 0$ ist, während $\theta = 0$ zu einer stationären Metrik führt. Daher soll hier nur der Fall $\omega_{ab} = 0$ betrachtet werden, was für $m = 0$ als zusätzliche Annahme gesehen werden muß.

Man betrachte nun

$$u^a R_{a[b} u_{c]} = -2\, U u^a \varphi_{,a}\, \varphi_{,[b} u_{c]} \; .$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\varphi_{,a} u^a = 0$ oder $\varphi_{,[a} u_{b]} = 0$ ist, was im folgenden angenommen werden soll. Aufgrund der Hyperflächenorthogonalität kann man neben $u^a \sim \delta^a_0$ auch $u_a \sim \delta^0_a$ wählen, so daß die obigen Bedingungen gleichbedeutend sind mit

$$\varphi = \varphi(x^\alpha) \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi(t) \; . \tag{6.1}$$

Damit ist $\theta = \theta(t)$ und $q = (B(x^\alpha) + C(t))^{-1}$. Für $m \neq 0$ ergibt sich somit

$$q = q(t) \; .$$

Für den Fall $m = 0$ stellt man zunächst fest, daß wegen ${T_M}^{ab}{}_{;b} = 0$ auch hier

$$\rho = (B(x^\alpha) + C(t))^4$$

folgt. Die Gleichung $G_{ab} u^a u^b = \kappa\, \rho + \kappa\, T_{M\,ab}\, u^a u^b$ ist daher äquivalent zu (man vergleiche Abschnitt 4.3)

$$\frac{1}{2}\tilde{R}\,(B+C)^2 - 3{C_{,0}}^2 - 2\gamma^{\mu\nu} B_{,\mu,\nu}\,(B+C) + 3\gamma^{\mu\nu} B_{,\mu} B_{,\nu} = \kappa\,(B+C)^4 + \kappa\, T_{M\,ab} u^a u^b$$

$$\Leftrightarrow \quad 3F(\tau) = \frac{1}{2}\tilde{R}\,(B+\tau)^2 - 2\gamma^{\mu\nu} B_{,\mu,\nu}(B+\tau) + 3\gamma^{\mu\nu} B_{,\mu} B_{,\nu} - \kappa\,(B+\tau)^4 - \kappa\, T_{M\,ab} u^a u^b$$

mit $\tau := C(t)$ und $F(\tau) := {C_{,0}}^2$. Wegen (6.1) kann $T_{M\,ab}\, u^a u^b$ nur von t und daher von τ oder nur von x^α abhängen. Wie bei EGS führt so die Feststellung, daß die rechte Seite eine Funktion von τ sein muß, zu $A = const.$ und folglich zu $q = q(t)$.
Damit hat man die bekannten Resultate $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ und $f = f(a(t)^2\, \underline{p}^2)$. Insbesondere ist $\rho = \rho(t)$, $P = P(t)$.

Wenn man nun die Feldgleichungen auswertet, erhält man

$$3\,\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa\,\left(\rho - U\varphi_{,a}\varphi^{,a} + V + \frac{1}{2}(3P - \rho + 2\,U\varphi_{,a}\varphi^{,a} - 4V)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\,\frac{\ddot{a}}{a} = -\kappa\,(\frac{3P+\rho}{2} - V) \tag{6.2}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}(a\ddot{a} + 2\,\dot{a}^2) &= \kappa\,(P\, g_{\mu\nu} + U\varphi_{,a}\varphi^{,a} - V) - 2\kappa\, U\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \\ &\quad -\kappa\, g_{\mu\nu}(\frac{3P-\rho}{2} + U\varphi_{,a}\varphi^{,a} - 2V) \\ &= \kappa\, a^2 \gamma_{\mu\nu}(V + \frac{\rho - P}{2}) - 2\kappa\, U\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} \; . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zu

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} K + 2\kappa\, U\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} = 0 \; , \tag{6.3}$$

$$K := a\ddot{a} + 2\,\dot{a}^2 - \kappa\, a^2 (V + \frac{\rho - P}{2}) \; .$$

Gleichung (4.33) aus Abschnitt 4.3 bleibt aber auf jeden Fall bestehen, da sie allein aus der funktionalen Form der Verteilungsfunktion folgte.
An dieser Stelle muß man unterscheiden, welche der Bedingungen (6.1) erfüllt sein soll.

$\underline{\varphi = \varphi(t)}$

In diesem Fall ist auch $V = V(t)$ und damit $K = K(t)$, so daß mit der gleichen Begründung wie bei EGS

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} K = 0 \,, \tag{6.4}$$

$$K := a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \kappa a^2 (V + \frac{\rho - P}{2}) = const.$$

folgt. Das Ergebnis ist also die Robertson-Walker-Metrik, aber mit einer anderen Zeitentwicklung. Mit $k := -\frac{1}{2K} = -1, 0, 1$ (nach geeigneter Umskalierung von a) folgt mit (6.2) nämlich

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3} (\rho + V) \,. \tag{6.5}$$

$\underline{\varphi = \varphi(x^\alpha)}$

Hier gilt $V = V(x^\alpha)$. Durch Ableiten von Gleichung (6.3) nach t erhält man außerdem $\gamma_{\mu\nu}\dot{K} = 0$, so daß

$$\dot{K} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)^{\cdot} - 2\kappa\, a\dot{a}\, (V + \frac{\rho - P}{2}) - \kappa\, a^2 \frac{\dot{\rho} + \dot{P}}{2} = 0$$

resultiert. Da in diesem Ausdruck V nur von den Raumkoordinaten abhängt und alle anderen Terme nur von t, muß (für $\dot{a} \neq 0$)

$$V = const.$$

sein. Als Feldgleichung bleibt

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} K + 2\kappa\, U \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} = 0 \,, \tag{6.6}$$

$$K = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \kappa\, a^2 (V + \frac{\rho - P}{2}) = const. \tag{6.7}$$

mit der Zeitentwicklung von Gleichung (6.5).
Es ergibt sich also nicht die Robertson-Walker-Metrik, die Zeitentwicklung ist für $V = 0$ ($V = const.$!) aber wie bei EGS.

Unter den Voraussetzungen $\varphi = \varphi(t)$ oder $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ konnte also eine zu EGS analoge Argumentation für das Skalarfeld durchgeführt werden. Während im ersten Fall die Robertson-Walker-Metrik resultierte, die durch die Zeitentwicklung (6.5) gekennzeichnet ist, führte der zweite zu der Differentialgleichung (6.6), aus der man keine direkten Schlüsse über die Metrik machen konnte. Immerhin konnte man die Metrik aber auch in diesem Fall auf die Form (4.29) aus Abschnitt 4.3 einschränken, wobei die Zeitentwicklung durch Gleichung (6.7) gegeben ist.

Schließlich soll noch untersucht werden, welche Änderungen sich ergeben, wenn V auch von $\varphi_{,a}$ abhängt, so daß die Lagrange-Dichte die Form

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \sqrt{-g}\, \Big(U(\varphi)\, \varphi_{,a} \varphi_{,b}\, g^{ab} - V(\varphi, \varphi_{,a}) \Big)$$

hat. Zunächst ergibt sich

$$T_M{}^{ab} = g^{ab} (U \varphi_{,c} \varphi^{,c} - V) - 2\, U \varphi^{,a} \varphi^{,b}$$

und

$$\Box\varphi + \frac{1}{2\,U} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \varphi_{,a} \varphi^{,a} + \frac{1}{2\,U} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{1}{2\,U} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_{,a}} \right)_{;a} = 0 \,.$$

Aus der Divergenz des Energie-Impuls-Tensors

$$\begin{aligned}
{T_M}^{ab}{}_{;b} &= (U\varphi_{,b}\varphi^{,b} - V)^{;a} - 2\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,b}\,\varphi^{,a}\varphi^{,b} - 2\,U\varphi^{,a}{}_{;b}\varphi^{,b} - 2\,U\varphi^{,a}\,\Box\varphi \\
&= -\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi^{,a}\varphi_{,b}\varphi^{,b} - \frac{\partial V}{\partial\varphi}\varphi^{,a} - \frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\varphi_{,b}{}^{;a} - 2\,U\varphi^{,a}\left(-\frac{1}{2\,U}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\varphi_{,b}\varphi^{,b} - \frac{1}{2\,U}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\,U}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\right)_{;b}\right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\varphi_{,b}{}^{;a} - \varphi^{,a}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\right)_{;b}
\end{aligned}$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{Dp^a}{Ds} = \frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\varphi_{,b}{}^{;a} - \varphi^{,a}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_{,b}}\right)_{;b} =: H^a\ .$$

Wie in Abschnitt 5.2 gezeigt läßt sich über den konformen Faktor q^2 bei einer solchen Bewegungsgleichung nur aussagen, daß er im Fall $m = m(t)$ oder $q = q(x^\alpha)$ der Differentialgleichung

$$m^2(q^2)_{,a}\,u^a + l(t)_{,a}\,u^a + 2\,q^2 H_a\,u^a = 0$$

genügt. Sogar mit den Annahmen $\varphi = \varphi(t)$ oder $\varphi = \varphi(x^\alpha)$, mit denen u^a wie oben gezeigt ein Ricci-Eigenvektor wäre, hätte man damit keine Möglichkeit, weitergehende Aussagen über q zu machen. Über die funktionale Form von H_a könnte man nämlich auch dann keine Aussagen treffen. Für $m = 0$ folgt außerdem aus den gleichen Gründen wie beim elektromagnetischen Feld nicht mehr $\rho = q^{-4}$, so daß auch dieser Argumentationsweg entfällt.

6.3 Skalarfeld mit Materiekopplung

In diesem Abschnitt soll ein Energie-Impuls-Tensor der Form

$$T^{ab} = (1 + \Psi(\varphi))\,T_I^{ab} + T_S^{ab}$$

betrachtet werden, wobei T_I^{ab} der Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit und

$$T_S^{ab} = g^{ab}\ (U(\varphi)\,\varphi_{,c}\varphi^{,c} - V(\varphi)) - 2\,U(\varphi)\,\varphi^{,a}\varphi^{,b}$$

sein soll. Er folgt aus der Lagrange-Funktion $\sqrt{-g}\,(U\varphi_{,a}\varphi^{,a} - V)$, die schon im vorigen Abschnitt verwendet wurde.

Aus der Feldgleichung und $T_S^{ab}{}_{;b} = 0$ (siehe voriger Abschnitt) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
0 &= \Psi_{,b}T_I^{ab} + (1+\Psi)\,T_I^{ab}{}_{;b} \\
\Leftrightarrow\quad T_I^{ab}{}_{;b} &= -\frac{\Psi'}{1+\Psi}\,\varphi_{,b}T_I^{ab}
\end{aligned}$$

mit $\Psi' := \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$ und somit

$$\frac{Dp^a}{Ds} = -\frac{\Psi'}{1+\Psi}\,\varphi_{,b}T_I^{ab} =: H^a\ .$$

Für die Auswertung der Bewegungsgleichung spielt nur die mit u_a überschobene Form

$$\begin{aligned}
H := H^a u_a &= -\frac{\Psi\prime}{1+\Psi}\,\varphi_{,b}\,(-\rho\,u^b) \\
&= \frac{\Psi\prime}{1+\Psi}\,\rho\,\dot\varphi
\end{aligned}$$

eine Rolle. Für den Fall $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ verschwindet dieser Ausdruck offensichtlich, und man erhält zunächst die gleichen Ergebnisse wie in EGS.
Wenn $\varphi = \varphi(t)$ ist, muß man sich auf die Ergebnisse von Abschnitt 5.2 beschränken, die nur für $q = q(x^\alpha)$ oder $m = m(t)$ erzielt werden konnten. Da der erste Fall zu einer stationären Metrik führen würde, soll von nun an $m = m(t)$ vorausgesetzt werden. Wegen $\varphi = \varphi(t)$ ist dieses auch zumindest nicht unplausibel.
Eine Einschränkung für die Form von q ließ sich außerdem nur für $m^2\theta + 3H \neq 0$ in Form der Differentialgleichung (5.30) gewinnen. Mit $u^a = q^{-1}\,\delta^a_0$ wird diese zu

$$m(t)^2 (q^2)_{,0} + l(t)_{,0} = -2Hq^3 \ . \tag{6.8}$$

Um diese Beziehung ausnutzen zu können, betrachtet man zunächst die aus der Feldgleichung folgende Beziehung

$$u^a R_{a[b}u_{c]} = -2\,U u^a \varphi_{,a}\,\varphi_{,[b}u_{c]} \ .$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ oder $\varphi = \varphi(t)$, so daß $\theta = \theta(t)$ und $q = (B(x^\alpha) + C(t))^{-1}$ resultiert. Im ersten Fall ist wie bereits erwähnt $H = 0$, und es folgt wie bei EGS $q = q(t)$. Für den zweiten Fall stellt man fest, daß Gleichung (6.8) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} &-2m^2(B+C)^{-3}C_{,0} + 2\,(B+C)^{-3}H + l_{,0} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &2H + (B(x^\alpha) + C(t))^3\, l(t)_{,0} - 2\,m(t)^2\, C(t)_{,0} = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.9}$$

Diese Gleichung läßt sich ohne weitere Kentnisse von H nicht ausnutzen. Die einzige Möglichkeit, die Argumentation weiterzuführen, und die daher auch getroffen werden soll, scheint daher die Annahme $\rho = \rho(t)$ zu sein, die wegen $\varphi = \varphi(t)$ auch $H = H(t)$ impliziert. Aus (6.9) folgt dann sofort $B = const.$ und somit $q = q(t)$. Allerdings ist $\rho = \rho(t)$ eine sehr starke Annahme, so daß die Relevanz des Ergebnisses für den Fall $\varphi = \varphi(t)$ etwas zweifelhaft erscheint.
Ohne Rechnung sei noch erwähnt, daß die Methode, den aus (6.8) folgenden Ausdruck $\rho = \frac{1+\Psi}{\Psi'\varphi}\,(-\frac{1}{2}(B+C)^3\, l_{,0} - m^2 C_{,0})$ in die mit $u^a u^b$ überschobene Feldgleichung einzusetzen, hier nicht erfolgreich ist. Man kann im Gegensatz zu der analogen Rechnung in EGS keinen Koeffizientenvergleich in $\tau := C(t)$ mehr durchführen.
Es gibt sogar noch ein zusätzliches Problem. Für die Verteilungsfunktion resultiert hier (für $\varphi = \varphi(t)$) nach den Ergebnissen von Abschnitt 5.2 $f = f(a^2E^2 + l(t))$. Wegen Gleichung (5.28) kann man aber aus $a = a(t)$ (a und q können synonym verwendet werden) nicht analog zu EGS $l = const. - m^2a^2$ folgern. Somit ergibt sich zwar auch hier $P = P(t)$, die für die Ableitung der Gleichung (4.33) benutzte Form $f = f(a^2|\underline{p}|^2)$ kann aber nicht mehr gerechtfertigt werden.

Die Feldgleichungen lauten hier

$$3\,\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2}\,(1+\Psi)\,(3P+\rho) + \kappa V \ , \tag{6.10}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}K + 2\kappa\, U\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} = 0 \ , \tag{6.11}$$

$$K := a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - \kappa\, a^2\left(V + (1+\Psi)\,\frac{\rho - P}{2}\right) \ . \tag{6.12}$$

Man erhält somit die folgenden Schlußfolgerungen:

<u>$\varphi = \varphi(t)$</u>

Da in diesem Fall auch V und Ψ Funktionen von t sind, folgt wie bei EGS

$$\tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}K = 0 \ , \quad K = const. \quad . \tag{6.13}$$

Als Ergebnis folgt also die Robertson-Walker-Metrik mit der Zeitentwicklung von Gleichung (6.10).

$\underline{\varphi = \varphi(x^\alpha)}$

Ableiten von (6.11) nach t liefert $\gamma_{\mu\nu} K_{,0} = 0$ und somit $K = K(x^\alpha)$. Da aber nicht nur V, sondern auch Ψ von den Raumkoordinaten abhängt, kann man hier nicht $K = const.$ folgern. Die Feldgleichungen lassen sich so nicht vereinfachen.

Wie schon im vorigen Abschnitt mußten hier für die Weiterführung der Argumentation die Annahmen $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ oder $\varphi = \varphi(t)$ getroffen werden. Im zweiten Fall ist man dabei auf die Ergebnisse des Abschnitts 5.2 angewiesen, in dem für die Ableitung der Differentialgleichung (5.30) die Voraussetzung $m = m(t)$ gemacht werden mußte (der Fall $q = q(x^\alpha)$ führt zu einer stationären Metrik). Außerdem ließ sich die Differentialgleichung (6.9) nur für die sehr starke Annahme $\rho = \rho(t)$ ausnutzen, so daß das Resultieren der Robertson-Walker-Metrik für den Fall $\varphi = \varphi(t)$ bei weitem nicht die Relevanz wie in der Arbeit von EGS hat. Für $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ mußte man sich mit den Gleichungen (6.10), (6.11) und (6.12) sowie der Form (4.29) für die Metrik begnügen, was analog zu den Resultaten des letzten Abschnitts ist.

6.4 Brans-Dicke-Theorie

Wie in Anhang A.2 beschrieben, ist die Brans-Dicke-Theorie durch

$$G_{ab} = \kappa \frac{1}{\varphi} T_{ab} + \omega \frac{1}{\varphi^2} (\varphi_{,a}\varphi_{,b} - \frac{1}{2} g_{ab}\, \varphi_{,c}\varphi^{,c}) + \frac{1}{\varphi}(\varphi_{,a;b} - g_{ab}\Box\varphi) \ ,$$

$$\Box\varphi = \kappa \frac{1}{3+2\omega} T$$

gegeben. Da die Materie-Lagrange-Funktion nicht von φ abhängt, bewegt sich die Materie bei Abwesenheit von äußeren Feldern auf Geodäten, so daß sich in dieser Beziehung keine Änderungen zu EGS ergeben.

Wenn u^a ein Eigenvektor von R_{ab} sein soll, muß

$$u^a R_{a[b}u_{c]} = \omega \frac{1}{\varphi^2} u^a \varphi_{,a}\varphi_{,[b}u_{c]} - \kappa \frac{1}{\varphi} u^a T_{a[b}u_{c]} + \frac{1}{\varphi} u^a \varphi_{,a;[b}u_{c]} = 0$$

gelten. Zumindest für das Verschwinden des letzten Terms gibt es keinen einleuchtenden physikalischen Grund. Selbst wenn u^a tatsächlich ein Ricci-Eigenvektor ist, was man als zusätzliche Annahme hinzunehmen müßte, kann man sich leicht überlegen, daß es wegen der komplizierten Feldgleichungen weder möglich ist, im Fall $m = 0$ auf $q = q(t)$ zu schließen, noch eine eindeutige Metrik zu finden, wenn man $G = -dt^2 + a(t)^2\, \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ vorgibt.
Die Argumentation von EGS läßt sich also in der Brans-Dicke-Theorie nicht durchführen.

Teil II

Die Zeitentwicklung der axialsymmetrischen Bianchi I - Metrik

Einleitung

In diesem Teil soll die Zeitentwicklung einer speziellen Metrik untersucht werden, nämlich der in Kapitel 7 beschriebenen axialsymmetrischen Bianchi I - Metrik. Sie ist räumlich homogen, aber nicht isotrop, und stellt eine der einfachsten Verallgemeinerungen der Robertson-Walker-Metrik dar. Als Materie wird ein Teilchen-Gas betrachtet, das durch eine Verteilungsfunktion beschrieben wird, die anfangs isotrop ist und sich dann gemäß der Liouville-Gleichung entwickelt. Die Teilchen können dabei Fermionen oder Bosonen mit verschwindender oder nichtverschwindender Ruhemasse sein. Das Gas soll aber nicht aus verschiedenen Teilchensorten bestehen.

Das Hauptanwendungsgebiet dieser Überlegungen ist die Kosmologie. Im frühen Universum befanden sich nämlich wie in Abschnitt 3.3 beschrieben viele Teilchen zunächst im thermodynamischen Gleichgewicht mit den anderen Teilchen und waren so durch eine isotrope Verteilungsfunktion gekennzeichnet. Dann koppelten sie vom Rest der Materie ab, um sich von da an kollisionsfrei zu entwickeln.

Die Form des Energie-Impuls-Tensors soll dabei nicht, wie sonst üblich, aus allgemeinen Überlegungen oder Einfachheits-Annahmen folgen, sondern mit Hilfe der Kinetischen Theorie so weit wie möglich aus den Symmetrieeigenschaften der Metrik abgeleitet werden. Während im ersten Teil dieser Arbeit eine bestimmte Form für die Verteilungsfunktion vorausgesetzt und die damit verträglichen Metriken gesucht wurden, wählt man hier also eine bestimmte Metrik aus und versucht, über die Verteilungsfunktion die Form des Energie-Impuls-Tensors abzuleiten und die so entstehenden Feldgleichungen zu lösen. Auf diese Weise erhält man ein selbstkonsistentes Bild, das durch die Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen spezifiziert ist.

Trotz dieser inneren Geschlossenheit hat dieser Zugang mit gewissen Problemen zu kämpfen. Für die vollständige Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors müssen hier z.B. die obigen Annahmen über die Charakteristika der Materie gemacht werden. Viel schwerer wiegt das Problem, daß die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors in den meisten Fällen nicht analytisch durchführbar ist oder zu einem sehr komplizierten Ausdruck führt (siehe z.B. [29]). Eine analytische Lösung der Feldgleichungen ist damit praktisch unmöglich.

Gerade für mögliche Anwendungen in der Kosmologie hat dieser Zugang aber mehr Bedeutung verdient, als ihm üblicherweise in der Literatur zukommt. Zum einen sind hier nämlich gerade einfache und hochsymmetrische Metriken interessant. Außerdem ist die Wahl des Energie-Impuls-Tensors, die für das Aufstellen und Lösen der Feldgleichungen getroffen werden muß, normalerweise sehr willkürlich und nicht in Übereinstimmung mit der Kinetischen Theorie. Von einer allgemeinrelativistischen Thermodynamik kann man zudem kaum eine Hilfe erwarten. Diese Theorie hat mit großen grundsätzlichen Problemen zu kämpfen und hat noch keine endgültige Form gefunden, die allgemein anerkannt wäre (z.B. [25]). Das liegt vor allem an dem phänomenologischen Charakter der Thermodynamik, der mit unserem mangelhaften Wissen über globale Materieeigenschaften und den in Abschnitt 3.1 angesprochenen erkenntnistheoretischen Problemen der Kosmologie nicht verträglich ist.

Die Motivation für die Untersuchung von anisotropen oder auch inhomogenen Metriken in der Kosmologie entspringt zumindest aus drei Überlegungen. Zunächst stellen sie eine Verallgemeinerung der Robertson-Walker-Metrik dar und können möglicherweise zu einem ebenso konsistenten Bild führen wie das Kosmologische Standardmodell. Einige Probleme (z.B. die der

Strukturbildung) könnten durch eine andere Metrik sogar besser gelöst werden. Außerdem ist unser Universum mit seinen Sternen und Galaxien natürlich nicht exakt isotrop und homogen, so daß die Robertson-Walker-Metrik nur als Näherung gesehen werden kann. Schließlich könnte es möglich sein, daß der heutige Zustand des Universums für eine ganze Klasse von Metriken resultiert (oder gar für alle). Dieser letzte sehr radikale Standpunkt, der viele grundsätzliche Probleme der Kosmologie berührt und sie bis heute beeinflußt, wurde zum ersten Mal von C.Misner zur Diskussion gestellt [24]. In seiner Arbeit versuchte er, mit Hilfe der Kinetischen Theorie zu zeigen, daß die heute beobachtete minimale Temperaturanisotropie (siehe Abschnitt 3.3) auch dann resultiert, wenn man eine Bianchi I - Metrik zugrunde legt, die zu frühen Zeiten eine beliebig große Anisotropie besaß. Den physikalischen Mechanismus dafür glaubte er in der Wirkung des anisotropen Drucks der kollisionsfreien Neutrinos nach der Abkopplung und vor allem in der Viskosität der Neutrinos während des Vorgangs der Abkopplung gefunden zu haben. Die Wirkung des zweiten Effekts, der aus Näherungslösungen der Boltzmann-Gleichung abgeleitet wurde, ist aber in den darauffolgenden Jahren kontrovers diskutiert und sehr relativiert worden ([22], [23], [33], [5], [34], [6], [20]).
Während dieser Effekt hier nicht diskutiert werden soll, gab seine Untersuchung der kollisionsfreien Neutrinos für die Bianchi I - Metrik die Anregung zu dieser Arbeit. Neben der grundsätzlichen Problemstellung stammen die hier vorgeführte Ableitung der funktionalen Form der Verteilungsfunktion, die Bestimmung der Temperatur und die Näherungslösungen von ihm. Über die Näherungslösungen hinausgehende Aussagen über den Zeitverlauf der Metrikfunktionen konnte er aber kaum machen. Das Ergebnis der in Kapitel 8 durchgeführten Berechnung des Energie-Impuls-Tensors im Fall der axialsymmetrischen Bianchi I - Metrik wurde zuerst von Stewart [33] vorgestellt[1]. Eine Diskussion der Lösungen der Einstein-Liouville-Gleichungen hat aber auch er nicht geliefert. Außerdem behandelt er nur den Fall, daß die Neutrinos eine verschwindende Ruhemasse haben[2]. Über die in diesem Rahmen resultierenden Lösungen der Brans-Dicke-Feldgleichungen, die in Kapitel 10 diskutiert werden, scheint es noch gar keine Literatur zu geben. Selbst über die Lösungen der Robertson-Walker-Metrik mit Materie in Form von Strahlung gibt es in jüngster Zeit noch Veröffentlichungen (z.B. [39]).
Gerade die Zeitentwicklung der Bianchi I - Metrik ist für die verschiedensten Energie-Impuls-Tensoren untersucht worden. Hier sei nur auf [17], [31], [12] verwiesen, in denen auch viele Literaturangaben stehen. Für diese Arbeit stellen sie aber keine Hilfe dar, i.a. ergeben sich völlig andere Zeitverläufe.

Das Vorgehen in diesem Teil der Arbeit läßt sich wie folgt skizzieren:
In Kapitel 7 wird zunächst die axialsymmetrische Bianchi I - Metrik mitsamt ihren Krümmungsgrößen und kinematischen Eigenschaften vorgestellt.
Die Kinetische Theorie kommt in Kapitel 8 bei der Bestimmung der Materieeigenschaften zum Tragen. Als Erstes wird hier die Form der Verteilungsfunktion aus der Forderung bestimmt, daß sie Lösung der Liouville-Gleichung und gleichzeitig mit den Symmetrien der Metrik „verträglich“ sein soll (näheres dort und in Anhang A.3). Die dort gefundene Form führt dann zu einem Ausdruck für die Temperatur des Teilchengases (Abschnitt 8.2). Ein zentraler Punkt ist die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors aus der Verteilungsfunktion in Abschnitt 8.3. Seine physikalischen Eigenschaften werden anschließend vorgestellt.
Inhalt des Kapitels 9 sind die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. Nach der Formulierung der Feldgleichungen werden in Abschnitt 9.2 Näherungslösungen für kleine Anisotropien vorgestellt, die für die Diskussion der Lösungen sehr hilfreich sind. Anschließend werden die Probleme erörtert, die bei der Lösung der Feldgleichungen ausgehend von einem Anfangszustand auftreten. In Abschnitt 9.4 wird das numerische Verfahren bezüglich seiner Konsistenz und der

[1] Auch im Fall der Bianchi I - Metrik läßt sich die Berechnung analytisch durchführen [15], dabei treten aber elliptische Integrale auf.
[2] Die Frage, ob Neutrinos eine kleine nichtverschwindende Ruhemasse haben, ist bis heute ungeklärt.

auftretenden (Rundungs-) Fehler geprüft. Die Ergebnisse der numerischen Simulation werden dann in den Abschnitten 9.5 und 9.6 für $m = 0$ bzw. $m \neq 0$ graphisch dargestellt und diskutiert. Der Aufbau des Kapitels 10, in dem Lösungen der Brans-Dicke-Feldgleichungen untersucht werden, ist ganz analog. In Abschnitt 10.2 werden zusätzlich die exakten Lösungen für die Robertson-Walker-Metrik mit den Materieformen Staub und Strahlung vorgestellt. Die Resultate der numerischen Simulation sind Inhalt der Abschnitte 10.6 und 10.7. Am Ende des Abschnitts 10.7 findet sich außerdem eine kurze Zusammenfassung der Lösungen des Einstein- und des Brans-Dicke-Systems.

7. Die Metrik

7.1 Die axialsymmetrische Bianchi I - Metrik

Die axialsymmetrische Bianchi I - Metrik hat die Form

$$ds^2 = -dt^2 + A(t)^2 dx^2 + B(t)^2 \left(dy^2 + dz^2\right) .$$

Sie ist räumlich homogen, aber nicht isotrop. Der Name leitet sich aus der (in Abschnitt 1.3 angesprochenen) Klassifizierung der räumlich homogenen Metriken mit drei Killing-Vektoren in neun sogen. Bianchi-Typen I bis IX ab. Die Bianchi I - Metrik hat dabei die Form $ds^2 = -dt^2 + A(t)^2 dx^2 + B(t)^2 dy^2 + C(t)^2 dz^2$. Im Grunde gehört die obige Metrik mit ihren vier Killing-Vektoren (siehe unten) also nicht zu den Bianchi-Modellen, die Bezeichnung ist aber üblich und kann hier nicht zu Verwechslungen führen.
Zu der Metrik gehören vier Killing-Vektoren, nämlich

$$\xi^a_{(1)} = \delta^a_1 \ , \quad \xi^a_{(2)} = \delta^a_2 \ , \quad \xi^a_{(3)} = \delta^a_3$$

und

$$\xi^a_{(4)} = z\,\delta^a_2 - y\,\delta^a_3 \ .$$

Dieses kann man leicht nachrechnen oder [28] entnehmen. Die ersten drei korrespondieren mit der Homogenität der raumartigen Hyperflächen $t = const.$, während der vierte die Axialsymmetrie repräsentiert. Die einzigen nicht verschwindenden Strukturkonstanten sind offensichtlich

$$\begin{aligned} K^3_{24} &= -1 \quad , \qquad K^3_{42} = 1 \\ K^2_{34} &= 1 \quad , \qquad K^2_{43} = -1 \ . \end{aligned}$$

Gerade bei der Berechnung des Energie-Impuls-Tensors und der Formulierung der Feldgleichungen wird es später äußerst nützlich sein, die Metrikfunktion $A(t)$ durch

$$k(t) := \frac{B(t)}{A(t)}$$

zu ersetzen. Die untenstehenden leicht zu berechnenden Komponenten des Ricci- und Einstein-Tensors werden daher auch durch B und k ausgedrückt.

Die zur Metrik gehörenden nichtverschwindenden Christoffel-Symbole ergeben sich als (der Strich soll dabei die Ableitung nach t bezeichnen):

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{01} &= \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} - \frac{k'}{k} \quad , \qquad \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{B'}{B} \\ \Gamma^0_{11} &= AA' = \frac{B^2}{k^2}\left(\frac{B'}{B} - \frac{k'}{k}\right) \quad , \qquad \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = BB' \ . \end{aligned}$$

Die Komponenten des Ricci-Tensors lauten

$$\begin{aligned}
R^0_0 &= 3\frac{B''}{B} - 2\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} + 2\frac{k'^2}{k^2} - \frac{k''}{k} \\
R^1_1 &= \frac{B''}{B} + 2\frac{B'^2}{B^2} - 4\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} + 2\frac{k'^2}{k^2} - \frac{k''}{k} \\
R^2_2 = R^3_3 &= \frac{B''}{B} + 2\frac{B'^2}{B^2} - \frac{B'}{B}\frac{k'}{k}
\end{aligned}$$

und die des Einstein-Tensors

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= -3\frac{B'^2}{B^2} + 2\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} \\
G^1_1 &= -2\frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} \\
G^2_2 = G^3_3 &= -2\frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} + 3\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} - 2\frac{k'^2}{k^2} + \frac{k''}{k} \,.
\end{aligned}$$

Um die Expansion und die Anisotropie unabhängig voneinander beschreiben zu können, ist es für viele Zwecke sinnvoll, die Metrik in der in [24] eingeführten Form

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha} e^{2\beta_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu \,,$$

$$\beta_{\mu\nu} := \frac{1}{3}\beta\left(-2\,\delta^1_\mu\delta^1_\nu + \delta^2_\mu\delta^2_\nu + \delta^3_\mu\delta^3_\nu\right)$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{3}\ln(AB^2) = \ln\left(B\,k^{-\frac{1}{3}}\right) \\
\beta &= \ln\frac{B}{A} = \ln k
\end{aligned}$$

zu schreiben. Die Größen wurden dabei gerade so gewählt, daß β den spurfreien Anteil der Metrik beschreibt ($\beta^\mu{}_\mu = 0$) und α den spurbehafteten. Wie man im nächsten Abschnitt sehen wird, haben die zeitlichen Ableitungen von α und β dadurch eine direkte physikalische Bedeutung.

7.2 Kinematische Eigenschaften der Metrik

Um die kinematischen Eigenschaften einer Metrik zu beschreiben, muß man die kovariante Ableitung $u_{a;b}$ eines Vektorfeldes u^a untersuchen, das die Weltlinien der Teilchen generiert. Die invariante Zerlegung von $u_{a;b}$ in physikalisch interpretierbare Größen wurde in Abschnitt 4.2 vorgeführt. Da sich u^a immer auf die Form $u^a = \delta^a_0\, u^0$ mit beliebigen $u^0 = const.$ transformieren läßt, kann man für die axialsymmetrische Bianchi-I-Metrik (wegen $g_{0\mu} = 0$ und $g_{00} = -1$) $u_a = \delta^0_a$ wählen. Ein solches Vektorfeld ist hyperflächennormal, es steht senkrecht zu den Hyperflächen $t = const.$:

$$\begin{aligned}
\omega_{ab} &= h^c_a h^d_b u_{[c,d]} \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

Es ist hier zudem noch geodätisch:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_a &= u_{a;b}u^b = -\Gamma^0_{a0} \\
&= 0 \,.
\end{aligned}$$

Die Expansion und die Scherung verschwinden aber nicht, man erhält

$$\begin{aligned}\theta &= u^a{}_{;a} = \Gamma^a_{a0} \\ &= \frac{A'}{A} + 2\frac{B'}{B} \\ &= 3\frac{B'}{B} - \frac{k'}{k}\end{aligned}$$

für die Expansion und

$$\begin{aligned}\sigma_{ab} &= u_{(a;b)} + \dot{u}_{(a}u_{b)} - \frac{1}{3}\theta\, h_{ab} = \Gamma^0_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab} \\ &= -\frac{2}{3}\frac{B^2}{k^2}\frac{k'}{k}\,\delta^1_a\delta^1_b + \frac{1}{3}B^2\frac{k'}{k}\,(\delta^2_a\delta^2_b + \delta^3_a\delta^3_b)\end{aligned}$$

und somit

$$\sigma^a_b = \frac{1}{3}\frac{k'}{k}\,(-2\,\delta^a_1\delta^1_b + \delta^a_2\delta^2_b + \delta^a_3\delta^3_b)$$

für die Scherung. Als Scherungsskalar ergibt sich

$$\sigma^2 := \frac{1}{2}\sigma^{ab}\sigma_{ab} = \frac{1}{3}\frac{k'^2}{k^2}\ .$$

Die Metrikfunktionen α und β stehen mit diesen Größen durch

$$\begin{aligned}\theta &= 3\,\alpha' \\ \sigma^2 &= \frac{1}{3}\,\beta'^2\ .\end{aligned}$$

in Verbindung. Die Ableitung von α beschreibt also die Expansion, während die von β ein Maß für die Scherung ist.

Wegen der Anisotropie sind für die Beschreibung der Bianchi I - Metrik entsprechend den drei unabhängigen Raumrichtungen drei Hubbleparameter H_μ nötig, wobei hier natürlich $H_2 = H_3$ ist. Für diese Größen gilt

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} - \frac{k'}{k} \\ H_2 = H_3 &= \frac{B'}{B}\ .\end{aligned}$$

Der mittlere Hubbleparameter ist durch

$$H := \frac{1}{3}\,(H_1 + H_2 + H_3)\ .$$

gegeben. Mit diesen Größen kann man ein nützliches Maß für die Anisotropie definieren, nämlich den in [12] definierten Anisotropieparameter

$$\begin{aligned}\vartheta &:= \frac{1}{3}\sum_{\mu=1}^{3}\frac{(H_\mu - H)^2}{H^2} \\ &= 2\,(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A})^2\,(\frac{A'}{A} + 2\frac{B'}{B})^{-2} \\ &= 2\frac{k'^2}{k^2}\,(3\frac{B'}{B} - \frac{k'}{k})^{-2}\ .\end{aligned}$$

Die physikalische Interpretation des Anisotropieparameters wird deutlich, wenn man ihn als

$$\vartheta = \frac{2}{9}\,\frac{\beta'^2}{\alpha'^2} = 6\,\frac{\sigma^2}{\theta^2}$$

schreibt. Offensichtlich beschreibt ϑ die Größe der Scherung relativ zur Expansion.

8. Die Materie

8.1 Lösung der Liouville-Gleichung

Wie in Abschnitt 1.3 angesprochen sind die Größen $y_A := \xi^a_{(A)}\, p_a$ Erhaltungsgrößen. Für die hier vorliegenden Killing-Vektoren sind dies insbesondere p_1, p_2 und p_3. Nach den Ergebnissen von Anhang A.3 ist nun

$$f = f(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

eine Lösung der Liouville-Gleichung und gleichzeitig unter den Raumzeitsymmetrien invariant, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y_A}\, K^C_{AB}\, y_C = 0 \qquad \text{für } B = 1, 2, 3, 4$$

mit den Strukturkonstanten aus dem letzten Kapitel gilt. Die resultierenden nichttrivialen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_4}\, y_3 &= 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial y_4}\, y_2 &= 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial y_2}\, y_3 + \frac{\partial f}{\partial y_3}\, y_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Für f ergibt sich daher

$$\begin{aligned} f &= f({y_1}, {y_2}^2 + {y_3}^2) \\ &= f({p_1}, {p_2}^2 + {p_3}^2)\,. \end{aligned}$$

Um einen expliziten Ausdruck für f angeben zu können, muß man noch gewisse Annahmen machen, die nicht aus dem vorliegenden Rahmen folgen. Dieses ist der Punkt, an dem man sich entscheiden muß, für welches physikalisches Modell man sich interessiert und welche Annahmen darin getroffen werden können.
Hier soll ein Teilchengas aus Fermionen oder Bosonen betrachtet werden, das sich im frühen Universum nach der Abkopplung aus dem thermodynamischen Gleichgewicht (siehe Abschnitt 3.3) frei und kollisionsfrei entwickelte. Direkt vor der Abkopplung kann man eine isotrope Verteilungsfunktion in der bekannten Form (z.B. [7])

$$f = \frac{h}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{e^{E_0/T_0} \pm 1}$$

voraussetzen, wobei das „+“ für Fermionen und das „−“ für Bosonen steht. Dabei bezeichnet E_0 die Energie und T_0 die Temperatur der Teilchen zum Zeitpunkt t_0, h steht für die Anzahl der inneren Freiheitsgrade. Durch eine immer mögliche Koordinatentransformation kann man außerdem

$$A(t_0) = B(t_0) = 1$$

wählen (die Metrikfunktionen haben keine direkte physikalische Bedeutung). Daher resultiert wegen $E = \sqrt{m^2 + g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}$ die Form

$$f(p) = \frac{h}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\sqrt{m^2+p^2}/T_0} \pm 1} ,$$

$$p^2 := {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 .$$

Da nun aber p_1, p_2 und p_3 Erhaltungsgrößen sind, läßt sich der Energie-Impuls-Tensor auch für spätere Zeiten, in denen die Metrik (für den Fall $k'(t_0) \neq 0$) nicht mehr isotrop ist, aus dieser Verteilungsfunktion gewinnen. Dieses wird in Abschnitt8.3 durchgeführt.

8.2 Die Temperatur

Bevor die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors aus dieser Verteilungsfunktion in Angriff genommen wird, soll zunächst untersucht werden, welchen Ausdruck man für die Temperatur der Teilchen erhält. Wegen der Anisotropie der Metrik hängt sie von der Raumrichtung ab, bezüglich der sie gemessen wird. Die Ergebnisse dieses Kapitels gehen zwar nicht in die Aufstellung und Lösung der Feldgleichungen ein, für die physikalische Interpretation der Lösungen sind sie aber unverzichtbar. Die Ableitung für den Fall $m = 0$ stammt dabei aus [24].

8.2.1 Die Temperatur für $m = 0$

Um einen Ausdruck für die physikalische Temperatur der Teilchen zu bekommen, kann man die im letzten Abschnitt begründete Form für f mit der physikalischen Verteilungsfunktion

$$f_{\mathrm{Ph}} = \frac{h}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}$$

vergleichen. Dabei ist $E = |p^0|$ die Energie der Teilchen und T die gesuchte Temperatur. Offensichtlich muß im Fall einer Übereinstimmung

$$\frac{p}{T_0} = \frac{|p^0|}{T}$$

sein. Diese Beziehung soll nun ausgenutzt werden.

Zunächst läßt sich $\frac{p}{T_0}$ schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{p}{T_0} &= (T_0)^{-1} \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^3} \\ &= (T_0)^{-1} \sqrt{\underline{p}^t \, \underline{p}} , \quad \underline{p} := (p_1, p_2, p_3) . \end{aligned}$$

Man kann nun durch

$$\underline{q} := H \, \underline{p}$$

mit

$$H := \begin{pmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & B^{-1} \end{pmatrix} = k^{\frac{1}{3}} B^{-1} \begin{pmatrix} k^{\frac{2}{3}} & & \\ & k^{-\frac{1}{3}} & \\ & & k^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

einen neuen Dreiervektor einführen. Er hat den Betrag $|p^0|$,

$$\begin{aligned} |\underline{q}| &= \sqrt{A^{-2} \, {p_1}^2 + B^{-2} \, {p_2}^2 + B^{-2} \, {p_3}^3} \\ &= \sqrt{g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} \\ &= |p^0| , \end{aligned}$$

und läßt sich somit als

$$\underline{q} = |p^0|\,\underline{n}\,, \quad |\underline{n}| = 1$$

schreiben. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{p}{T_0} &= (T_0)^{-1}\,(\underline{q}^t\,(H^{-1})^t\,H^{-1}\underline{q})^{\frac{1}{2}} \\
&= (T_0)^{-1}\,(|p^0|\,\underline{n}^t\,k^{-\frac{2}{3}}B^2 \begin{pmatrix} k^{-\frac{4}{3}} & & \\ & k^{\frac{2}{3}} & \\ & & k^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} |p^0|\,\underline{n})^{\frac{1}{2}} \\
&= |p^0|\,(T_0\,k^{\frac{1}{3}}B^{-1})^{-1}\,(\underline{n}^t \begin{pmatrix} k^{-\frac{4}{3}} & & \\ & k^{\frac{2}{3}} & \\ & & k^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \underline{n})^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck gleich $\frac{|p^0|}{T}$ sein soll, folgt

$$T(\underline{n}) = T_C\,N(\underline{n})$$

mit der „Zentraltemperatur“

$$\begin{aligned}
T_C &:= T_0\,B^{-1}k^{\frac{1}{3}} \\
&= T_0\,e^{-\alpha}\,.
\end{aligned}$$

und

$$N(\underline{n}) := (\underline{n}^t \begin{pmatrix} k^{-\frac{4}{3}} & & \\ & k^{\frac{2}{3}} & \\ & & k^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \underline{n})^{-\frac{1}{2}}\,, \quad |\underline{n}| = 1\,.$$

Die Zentraltemperatur läßt sich als die mittlere Temperatur der Teilchen interpretieren und wird in dieser Arbeit oft auftauchen.
Der Term $N(\underline{n})$ spezifiziert die Abhängigkeit von der Raumrichtung. Drückt man $\underline{n}$ in Kugelkoordinaten aus, d.h.

$$\underline{n} = (\cos\theta, \sin\theta\,\cos\varphi, \sin\theta\,\sin\varphi)\,,$$

erhält man

$$N(\theta) = k^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

In Abschnitt 8.3 wird deutlich werden, daß sich eine nichtverschwindende Masse nur für $m \gtrapprox T_C$ in dem Energie-Impuls-Tensor niederschlägt. Da e^α und somit T_C im Laufe der Zeit kleiner wird, macht sich die Masse daher nur für große Zeiten bemerkbar.
Da der Energie-Impuls-Tensor im Übergangsbereich $m \approx T_C$ eine sehr komplizierte Form hat, ist man daher neben dem Fall $m = 0$ an dem Grenzfall $m \gg T_C$ interessiert.

8.2.2 Die Temperatur für $m \gg T_C$

Da es für $m \neq 0$ keine exakte Form für die Verteilungsfunktion f gibt, die Lösung der Liouville-Gleichung wäre, kann man hier nicht so vorgehen wie im Fall $m = 0$. Stattdessen soll hier die aus der Friedmann-Lösung bekannte Beziehung $T \sim e^{-2\alpha}$ angenommen werden. Zu dieser Relation führt auch die Annahme $\rho \sim T^{\frac{3}{2}}$, da man für die Energiedichte ρ in Abschnitt 8.3 den Ausdruck $\rho \sim e^{-3\alpha}$ für $m \gg T_C$ erhält. Daher soll hier der Ansatz

$$T^M(\underline{n}) = K(\underline{n}, \beta)\,e^{-2\alpha}$$

gemacht werden, wobei der Index M den hier betrachteten Grenzfall anzeigen soll. Um $K(\underline{n}, \beta)$ zu bestimmen, muß man noch eine zusätzliche Annahme treffen. Diese soll darin bestehen, daß

$T(\underline{n})$ und $T^M(\underline{n})$ übereinstimmen, wenn $T_C = m$ und somit $e^\alpha = \frac{T_0}{m}$ ist. Diese Annahme ist allerdings etwas willkürlich, da $T(\underline{n})$ und $T^M(\underline{n})$ eigentlich nur für $m \ll T_C$ bzw. $m \gg T_C$ einen korrekten Ausdruck für die Temperatur darstellen und im Übergangsbereich gar nicht definiert sind. Damit gilt

$$\begin{aligned} K(\underline{n},\beta)\,\frac{m^2}{(T_0)^2} &= m\,N(\underline{n}) \\ \Leftrightarrow \quad K(\underline{n},\beta) &= \frac{(T_0)^2}{m}\,N(\underline{n})\,. \end{aligned}$$

Es resultiert also

$$T^M(\underline{n}) = T_C^M\,N(\underline{n})$$

mit

$$\begin{aligned} T_C^M &:= m^{-1}(T_0)^2\,e^{-2\alpha} \\ &= m^{-1}(T_0)^2\,B^{-2}k^{\frac{2}{3}}\,. \end{aligned}$$

8.2.3 Die Temperatur-Anisotropie

Wie oben gezeigt wurde, ist die Temperatur von der Raumrichtung θ abhängig, bezüglich der sie gemessen wird. Die Abhängigkeit ist dabei für $m = 0$ die gleiche wie für $m \gg T_C$.
Die zu den drei Raumrichtungen gehörenden Temperaturen lauten (T und T_C können dabei auch für T^M und T_C^M stehen)

$$\begin{aligned} T_1 &= T(\theta = 0) = T_C\,k^{\frac{2}{3}} \\ T_2 &= T(\theta = \frac{\pi}{2}) = T_C\,k^{-\frac{1}{3}} \\ T_3 &= T(\theta = \pi) = T_2\,. \end{aligned}$$

Als Maß für die Temperatur-Anisotropie bietet sich die folgende Definition an [24]:

$$\begin{aligned} D(\ln T) &:= \frac{1}{\sqrt{3}}\left((\ln T_1 - \ln T_2)^2 + (\ln T_2 - \ln T_3)^2 + (\ln T_3 - \ln T_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\ln(kT_2) - \ln T_2| \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\ln k|\,. \end{aligned}$$

Dabei gilt offensichtlich

$$D(\ln T) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|k-1| + \mathcal{O}((k-1)^2)\,.$$

Das Anisotropiemaß

$$\begin{aligned} \Delta_{rel}T &:= \frac{\left((T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{T_1 + T_2 + T_3} \\ &= \sqrt{6}\,\frac{|k-1|}{k+2} \end{aligned}$$

führt für $k \approx 1$ auf die gleiche Form. Allerdings ist $\Delta_{rel}T$ nach oben und unten beschränkt und daher kein praktisches Maß für große Anisotropien.

8.3 Der Energie-Impuls-Tensor T^{ab}

8.3.1 Berechnung von T^{ab}

Der Energie-Impuls-Tensor ist gegeben durch $T^{ab} = \int p^a p^b f(x,p)\,\pi_m$ mit der in Abschnitt 8.1 begründeten Form

$$f(x^a, p^a) = f(p) = \frac{h}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{e^{\sqrt{p^2+m^2}/T_0} \pm 1}\,,$$

$$p := \sqrt{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2}$$

für die Verteilungsfunktion. Mit $p_1 = p\cos\theta$, $p_2 = p\sin\theta\sin\varphi$, $p_3 = p\sin\theta\cos\varphi$ erhält man mit der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Form für π_m

$$\pi_m = (-g)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{p^2}{\sqrt{m^2 + g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}}\,dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Diese Form des Volumenelements erweist sich für die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors als die sinnvollste. Es gilt daher

$$T^{ab} = (-g)^{-\frac{1}{2}}\int p^a p^b f(p)\,\frac{p^2}{\sqrt{m^2 + g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}}\,dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,. \tag{8.1}$$

Für die (0,0)-Komponente erhält man somit

$$\begin{aligned}
T^{00} &= (-g)^{-\frac{1}{2}}\int (m^2 + g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu)^{\frac{1}{2}}\,f(p)\,p^2\,dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \\
&= (AB^2)^{-1}\int (A^{-2}p^2\cos^2\theta + B^{-2}p^2\sin^2\theta + m^2)^{\frac{1}{2}}\,f(p)\,p^2\,dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \\
&= kB^{-4}\int (k^2p^2\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta + m^2B^2)^{\frac{1}{2}}\,f(p)\,p^2dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \\
&= kB^{-4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,(k^2\cos^2\theta + (1-\cos^2\theta) + \frac{m^2B^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}\,f(p)\,p^3\,.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \cos\theta$ resultiert

$$\begin{aligned}
T^{00} &= 2\pi\,kB^{-4}\int_0^\infty dp\,f(p)\,p^3\int_1^{-1}(-du)\,\left((k^2-1)\,u^2 + 1 + \frac{m^2B^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\pi\,kB^{-4}\tilde{k}\int_0^\infty dp\,f(p)\,p^3\int_{-1}^{1} du\,(a^2 \pm u^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
\tilde{k} &:= \sqrt{|k^2-1|} \\
a &:= (1 + \frac{m^2B^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}\,\tilde{k}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Das „+“ steht in dem letzten Ausdruck für $k > 1$ und das „−“ für $k < 1$. Der Fall $k = 1$ ergibt sich später aus einer Grenzwertbetrachtung und wird hier daher nicht gesondert untersucht. Die Integration über u ist elementar und liefert

$$T^{00} = 2\pi\,kB^{-4}\tilde{k}\int_0^\infty dp\,f(p)\,p^3\,\left(\sqrt{a^2+1} + a^2\left\{\begin{array}{c}\text{arsinh}\\ \text{arcsin}\end{array}\right\}(\frac{1}{a})\right)\,,$$

wobei die geschweifte Klammer wieder die Fallunterscheidung $k > 1$ (arsinh) bzw. $k < 1$ (arcsin) symbolisiert. Substituiert man schließlich noch p durch $p\,T_0$, erhält man mit

$$M := \frac{m}{T_0}$$

das Endresultat für T^{00}:

$$T^{00} = \frac{h}{4\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} k\,(kI_0 + \tilde{k}^{-1} I_1) \tag{8.2}$$

mit

$$I_0 := \int_0^\infty \frac{p^2 (p^2 + M^2 \frac{B^2}{k^2})^{\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1}\, dp \tag{8.3}$$

$$I_1 := \int_0^\infty \frac{p\,(p^2 + M^2 B^2)}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{c} \text{arsinh} \\ \text{arcsin} \end{array} \right\} \left(\tilde{k} p\,(p^2 + M^2 B^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\, dp\,. \tag{8.4}$$

Zu beachten ist hier, daß die Fallunterscheidung bei der Verteilungsfunktion (wie in Abschnitt 8.1) spezifiziert, ob Bosonen oder Fermionen beschrieben werden und von der anderen Fallunterscheidung unabhängig ist.
Mit der Substitution $u = \tilde{k} p\,(p^2 + M^2 B^2)^{-\frac{1}{2}}$ läßt sich I_1 auch als

$$I_1 = \tilde{k}^4 M^4 B^4 \int_0^{\tilde{k}} \frac{u\,(\tilde{k}^2 - u^2)^{-3}}{e^{\sqrt{M^2 p^2 u^2 (\tilde{k}^2 - u^2)^{-1} + M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{c} \text{arsinh}\, u \\ \text{arcsin}\, u \end{array} \right\} du\,.$$

schreiben. Diese Form erweist sich aber für Rechnungen und für die Implementation auf dem Computer als weniger nützlich.

Die Berechnung von T_1^1 läuft analog und wird daher nicht im Einzelnen vorgeführt:

$$\begin{aligned} T_1^1 &= (-g)^{-\frac{1}{2}} \int g^{11} {p_1}^2\,(m^2 + g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)^{-\frac{1}{2}}\, f(p)\, p^2\, dp\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ &= 2\pi\, k^3 B^{-4} \tilde{k} \int_0^\infty dp\, f(p)\, p^3 \int_{-1}^1 du\, u^2 (a^2 \pm u^2)^{-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Auch diese Integration über u ist elementar und liefert

$$T_1^1 = \frac{h}{4\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} \frac{k^3}{k^2 - 1}\,(kI_0 - \tilde{k}^{-1} I_1)\,. \tag{8.5}$$

Für T_2^2 ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} T_2^2 &= (-g)^{-\frac{1}{2}} \int g^{22} {p_2}^2\,(m^2 + g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)^{-\frac{1}{2}}\, f(p)\, p^2\, dp\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ &= \pi\, k B^{-4} \tilde{k} \int_0^\infty dp\, f(p)\, p^3 \int_{-1}^1 du\, (1 - u^2)\,(a^2 \pm u^2)^{-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Führt man die u-Integration aus, erhält man

$$T_2^2 = \frac{h}{8\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} \frac{k}{1 - k^2}\,(kI_0 - \tilde{k}^{-1} I_2) \tag{8.6}$$

mit

$$I_2 := \int_0^\infty \frac{p\,(p^2(2k^2 - 1) + M^2 B^2)}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{c} \text{arsinh} \\ \text{arcsin} \end{array} \right\} \left(\tilde{k} p\,(p^2 + M^2 B^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\, dp\,. \tag{8.7}$$

Mit der Substitution $u = \tilde{k}p\,(p^2 + M^2B^2)^{-\frac{1}{2}}$ hat I_2 die Form

$$I_2 = \tilde{k}^4 M^4 B^4 \int_0^{\tilde{k}} \frac{u\,(\tilde{k}^2 - u^2)^{-3}}{e^{\sqrt{M^2p^2(\tilde{k}^2-u^2)^{-1}+M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{l} (1+2u^2)\ \operatorname{arsinh} u \\ (1-2u^2)\ \arcsin\, u \end{array} \right\} du\ ,$$

die aber wie der analoge Ausdruck für I_1 weniger nützlich ist.
Aus der Symmetrie der Metrik folgt außerdem $T^3_3 = T^2_2$.

Für die Spur des Energie-Impuls-Tensors gilt

$$\begin{aligned} T^a{}_a &= T^0_0 + T^1_1 + 2\,T^2_2 \\ &= \frac{h}{4\pi^2}(T_0)^4 B^{-4} k \left(-kI_0 - \tilde{k}^{-1} I_1 + \frac{k^3}{k^2-1} I_0 - \frac{k}{k^2-1}\tilde{k}^{-1} I_1 + \frac{k}{1-k^2} I_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k^2-1}\tilde{k}^{-1} I_2 \right) \\ &= \frac{h}{4\pi^2}(T_0)^4 B^{-4} \frac{k\,\tilde{k}^{-1}}{k^2-1} \Big((1-2k^2)\, I_1 + I_2 \Big)\ . \end{aligned}$$

Aus der Definition von I_1 und I_2 folgt

$$\begin{aligned} T^a{}_a &= \frac{h}{4\pi^2}(T_0)^4 B^{-4} \frac{k\,\tilde{k}^{-1}}{k^2-1} \int_0^\infty \frac{2(1-k^2)M^2B^2p}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arsinh} \\ \arcsin \end{array} \right\} \Big(\tilde{k}p\,(p^2+M^2B^2)^{-\frac{1}{2}} \Big)\ dp \\ &= -\frac{h}{2\pi^2} m^2 (T_0)^2 B^{-2} k\tilde{k}^{-1}\ \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \frac{p}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arsinh} \\ \arcsin \end{array} \right\} \Big(\tilde{k}p\,(p^2+M^2B^2)^{-\frac{1}{2}} \Big)\ dp\ . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Wenn man T_C in Kelvin angibt, haben die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors die Einheit K^4, die wegen $G = c = k_B = 1$ der Einheit s^4 entspricht. Da aber z.B. $\rho = T^{00}$ die Interpretation einer Energiedichte mit der Einheit $g\,cm^{-3}$ hat, müßte eigentlich s^{-2} resultieren. Der Grund dafür liegt in der Unterdrückung von $\hbar$ bei der Definition des Energie-Impuls-Tensors (siehe Abschnitt 2.2). Der in der Implementation tatsächlich auftretende Zahlenwert von $\frac{1}{4\pi^2}(T_0)^4$ für $T_0 = 10^{10}\,K$ ist daher (wenn man die Naturkonstanten in Standardeinheiten ausdrückt) $\frac{1}{4\pi^2} 10^{40}\, G\, {k_B}^4 c^{-5} \hbar^{-3} \approx 2.156 \cdot 10^{-4}\, s^{-2}$.

Schließlich sei noch die Form von T^{ab} für $k \approx 1$ angegeben:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{h}{2\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} \int_0^\infty \frac{p^2\,(p^2+M^2B^2)^{\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left(1 + \frac{\frac{4}{3}p^2 + M^2B^2}{p^2+M^2B^2}\,(k-1) + \mathcal{O}((k-1)^2) \right) dp \\ T^1_1 &= \frac{h}{6\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} \int_0^\infty \frac{p^4\,(p^2+M^2B^2)^{-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left(1 + 3\frac{\frac{4}{5}p^2 + M^2B^2}{p^2+M^2B^2}\,(k-1) + \mathcal{O}(k-1)^2) \right) dp \\ T^2_2 &= \frac{h}{6\pi^2}\,(T_0)^4 B^{-4} \int_0^\infty \frac{p^4\,(p^2+M^2B^2)^{-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left(1 + \frac{\frac{4}{5}p^2 + M^2B^2}{p^2+M^2B^2}\,(k-1) + \mathcal{O}((k-1)^2) \right) dp \end{aligned}$$

sowie

$$T^a{}_a = -\frac{h}{2\pi^2}\,(T_0)^4 M^2 B^{-2} \int_0^\infty \frac{p^2\,(p^2+M^2B^2)^{-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1} \left(1 + \frac{\frac{2}{3}p^2 + M^2B^2}{p^2+M^2B^2}\,(k-1) + \mathcal{O}((k-1)^2) \right) dp\ .$$

Die elementare, aber ziemlich langwierige Entwicklung der auftretenden Terme und Funktionen, die zu diesen Ausdrücken führt, soll hier nicht vorgeführt werden, zumal die Näherungsformeln

für diese Arbeit nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen. Sie werden für die Implementation des numerischen Verfahrens verwendet, wenn $k \approx 1$ ist (genauer: im Intervall $[1-10^{-7}, 1+10^{-7}]$). Dieser Fall tritt aber abgesehen vom Zeitpunkt $t = t_0$ praktisch nie ein (siehe auch die Bemerkung am Ende von Abschnitt 9.4). Für die im nächsten Kapitel diskutierte physikalische Bedeutung von T^{ab} haben sie keine Anwendung.
Gerade für die physikalische Interpretation des Energie-Impuls-Tensors ist seine Form für die Fälle $m = 0$ und $m \gg T_C$ interessant, so daß diese nun untersucht werden sollen.

8.3.2 T^{ab} für $m = 0$

Für $m = 0$ wird das Integral I_0 zu

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty \frac{p^3}{e^p \pm 1}\, dp \\ &= \gamma \frac{\pi^4}{15} \end{aligned}$$

mit

$$\gamma := \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{für} \quad f \sim (e^{p/T_0}+1)^{-1} \quad \text{(Fermionen)} \\ 1 & \text{für} \quad f \sim (e^{p/T_0}-1)^{-1} \quad \text{(Bosonen)} \end{cases} .$$

Für I_1 und I_2 ergeben sich wegen $\operatorname{arsinh}\sqrt{k^2-1} = \operatorname{arcosh} k$ und $\arcsin\sqrt{1-k^2} = \arccos k$ die Resultate

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma \frac{\pi^4}{15} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arcosh} k \\ \arccos k \end{array} \right\} \\ I_2 &= \gamma \frac{\pi^4}{15} (2k^2-1) \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arcosh} k \\ \arccos k \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors lauten somit

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \gamma \tfrac{h\pi^2}{60} (T_0)^4 B^{-4}\, k\, (k + K(k)) \\ T^1_1 &= \gamma \tfrac{h\pi^2}{60} (T_0)^4 B^{-4} \tfrac{k^3}{k^2-1}\, (k - K(k)) \\ T^2_2 = T^3_3 &= \gamma \tfrac{h\pi^2}{120} (T_0)^4 B^{-4} \tfrac{k}{1-k^2}\, (k + (1-2k^2)K(k)) \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

mit

$$K(k) := \frac{1}{\sqrt{|k^2-1|}} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arcosh} k \\ \arccos k \end{array} \right\} . \tag{8.10}$$

Für spätere Rechnungen sind noch die leicht nachrechenbaren Formeln

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1-kK}{k^2-1} \tag{8.11}$$

und

$$K = 1 - \frac{1}{3}(k-1) + \frac{2}{15}(k-1)^2 + \mathcal{O}((k-1)^3) \tag{8.12}$$

nützlich.

8.3.3 T^{ab} für $m \gg T_C$

Der Grenzfall $m \gg T_C$ ist gleichbedeutend mit $MB \gg k^{\frac{1}{3}}$. Außerdem sollen in diesem Abschnitt die Fälle $k \ll 1$ und $k \gg 1$ ausgeschlossen werden, was aber nicht unbedingt $k \approx 1$ impliziert. Daher sollen Terme, die $\frac{k}{MB}$ oder $\frac{1}{MB}$ in höherer Ordnung enthalten, vernachlässigt werden. Der Einfachheit halber werden dabei $\mathcal{O}(\frac{k}{MB})$ und $\mathcal{O}(\frac{\tilde{k}}{MB})$ durch $\mathcal{O}(\frac{1}{MB})$ ersetzt. Im Gegensatz zum Fall $m = 0$ erhält man also nur eine Näherungsform für T^{ab}, die aber für die physikalische Interpretation von T^{ab} (nicht für die numerische Lösung der Feldgleichungen) wichtig ist.

Mit der Abkürzung

$$J(p) := \frac{p^2}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1}$$

gilt zunächst

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^\infty J(p)\,(p^2 + M^2B^2k^{-2})^{\frac{1}{2}}\,dp \\ &= \frac{MB}{k}\int_0^\infty J(p)\left(1 + \frac{1}{2}p^2\frac{k^2}{M^2B^2} + \mathcal{O}(\frac{p^4}{M^4B^4})\right)dp\,. \end{aligned}$$

Für die Berechnung von I_1 und I_2 erhält man wegen

$$\tilde{k}p\,(p^2 + M^2B^2)^{-\frac{1}{2}} = \tilde{k}\frac{p}{MB}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{M^2B^2} + \mathcal{O}(\frac{p^4}{M^4B^4})\right)$$

und $\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ das Zwischenresultat

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix}\operatorname{arsinh}\\ \arcsin\end{matrix}\right\}(\tilde{k}p\,(p^2 + M^2B^2)^{-\frac{1}{2}}) &= \tilde{k}\frac{p}{MB}(1 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{M^2B^2}) - \frac{1}{6}\tilde{k}(k^2-1)\frac{p^3}{M^3B^3} + \\ &\quad + \mathcal{O}(\frac{p^5}{M^5B^5}) \\ &= \tilde{k}\frac{p}{MB}\left(1 - \frac{1}{6}(k^2+2)\frac{p^2}{M^2B^2}\right) + \mathcal{O}(\frac{p^5}{M^5B^5})\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{J(p)}{p}M^2B^2(1 + \frac{p^2}{M^2B^2})\left(\tilde{k}\frac{p}{MB}(1 - \frac{1}{6}(k^2+2)\frac{p^2}{M^2B^2}) + \mathcal{O}(\frac{p^5}{M^5B^5})\right)dp \\ &= MB\,\tilde{k}\int_0^\infty J(p)\left(1 + \frac{1}{6}(4-k^2)\frac{p^2}{M^2B^2} + \mathcal{O}(\frac{p^4}{M^4B^4})\right)dp \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{J(p)}{p}M^2B^2\left(1 + \frac{(2k^2-1)p^2}{M^2B^2}\left(\tilde{k}\frac{p}{MB}(1 - \frac{1}{6}\frac{(k^2+1)p^2}{M^2B^2}) + \mathcal{O}(\frac{p^5}{M^5B^5})\right)\right)dp \\ &= MB\,\tilde{k}\int_0^\infty J(p)\left(1 + \frac{1}{6}(11k^2-8)\frac{p^2}{M^2B^2} + \mathcal{O}(\frac{p^4}{M^4B^4})\right)dp\,. \end{aligned}$$

Der resultierende Energie-Impuls-Tensor lautet damit

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{h}{2\pi^2}m\,(T_0)^3B^{-3}k\int_0^\infty J(p)\left(1 + \mathcal{O}(\frac{p^2}{M^2B^2})\right)dp \\ T^1_1 &= \frac{h}{6\pi^2}m^{-1}(T_0)^5B^{-5}k^3\int_0^\infty J(p)\,p^2\left(1 + \mathcal{O}(\frac{p^2}{M^2B^2})\right)dp \\ T^2_2 = T^3_3 &= \frac{h}{2\pi^2}m^{-1}(T_0)^5B^{-5}k\int_0^\infty J(p)\,p^2\left(1 + \mathcal{O}(\frac{p^2}{M^2B^2})\right)dp\,. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, daß sich die Terme $\mathcal{O}(\frac{p^2}{M^2B^2})$ in den Integralen vernachlässigen lassen, was wegen der speziellen Form von $J(p)$ gerechtfertigt erscheint, erhält man somit das Ergebnis

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \tfrac{h}{2\pi^2} J_0\, m\,(T_0)^3\, B^{-3} k \\ T^1_1 &= \tfrac{h}{6\pi^2} J_2\, m^{-1} (T_0)^5\, B^{-5} k^3 \\ T^2_2 = T^3_3 &= \tfrac{h}{2\pi^2} J_2\, m^{-1} (T_0)^5\, B^{-5} k \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

mit

$$\begin{aligned} J_0 &:= \int_0^\infty J(p)\, dp = \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1}\, dp \\ J_2 &:= \int_0^\infty J(p)\, p^2\, dp = \int_0^\infty \frac{p^4}{e^{\sqrt{p^2+M^2}} \pm 1}\, dp\,. \end{aligned}$$

Da M von der Größenordnung $10^{-6}\,\frac{m}{1eV}$ ist, kann M für die in dieser Arbeit betrachteten Massen in den Integralen vernachlässigt werden. Die so entstehenden Integrale sind elementar:

$$\begin{aligned} J_0 &= \begin{cases} \frac{9}{2}\,\xi(3) & \text{für Fermionen} \\ 6\,\xi(3) & \text{für Bosonen} \end{cases} \\ J_2 &= \begin{cases} \frac{225}{2}\,\xi(5) & \text{für Fermionen} \\ 120\,\xi(5) & \text{für Bosonen} \end{cases} \end{aligned}\,.$$

Dabei ist ξ die Riemannsche Zeta-Funktion mit $\xi(3) \approx 1.202$ und $\xi(5) \approx 1.037$.

8.4 Physikalische Eigenschaften von T^{ab}

In diesem Abschnitt sollen die physikalischen Eigenschaften von T^{ab} untersucht werden. Dabei wird vor allem auf die in Abschnitt 1.2 vorgeführte kovariante Zerlegung von T^{ab} Bezug genommen.
Mit der Wahl eines mitbewegten Bezugssystems, $u_a = \delta^0_a$, erhält man hier die Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho &= T^{ab} u_a u_b = T^{00} \\ P &= \frac{1}{3} T^{ab} h_{ab} = \frac{1}{3}\,(T^1_1 + 2T^2_2) \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned} q^a &= -T^{bc} u_c h^a_b = 0 \\ \pi^a_b &= T^{cd} h^a_c h_{bd} - P\, h^a_b \\ &= \frac{1}{3}\,(T^1_1 - T^2_2)\,(2\delta^a_1\delta^1_b - \delta^a_2\delta^2_b - \delta^a_3\delta^3_b)\,. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Da offensichtlich

$$\pi^2_2 = \pi^3_3 = -\frac{1}{2}\pi^1_1$$

gilt, bestimmen ρ, P und π^1_1 den Energie-Impuls-Tensor vollständig:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho \\ T^1_1 &= P + \pi^1_1 \\ T^2_2 = T^3_3 &= P - \frac{1}{2}\,\pi^1_1\,. \end{aligned}$$

Man kann nun explizite Ausdrücke für P und π^1_1 gewinnen. Da diese Größen aber nur für die physikalische Interpretation wichtig sind, ist es ausreichend, ihre explizite Form für die Grenzfälle $m = 0$ und $m \gg T_C$ anzugeben, bei denen sie auch eine sehr einfache Form haben. Dieses soll nun geschehen.

8.4.1 Physikalische Größen für $m = 0$

Für $m = 0$ kann man z.B. aus Gleichung (8.8) ablesen, daß

$$T^a{}_a = -T^{00} + T^1_1 + 2\,T^2_2 = 0$$

gilt. Die hieraus resultierende Zustandsgleichung lautet wegen $P = \frac{1}{3}\,(T^1_1 + 2\,T^2_2)$

$$P = \frac{1}{3}\,\rho\,.$$

Die Materie liegt also in Form von Strahlung vor.
Mit der in Abschnitt 8.2 eingeführten Zentraltemperatur $T_C := T_0\,k^{\frac{1}{3}}B^{-1}$ gilt ferner

$$\rho = T^{00} = \gamma\frac{h\pi^2}{30}\,{T_C}^4\,h(k)$$

mit

$$h(k) := \frac{1}{2}\,k^{-\frac{1}{3}}\,(k + K(k))\ .$$

Dabei wurde h gerade so gewählt, daß $h(1) = 1$ ist.
Für π^1_1 ergibt sich aus (8.14)

$$\pi^1_1 = \gamma\frac{h\pi^2}{180}\,(T_0)^4 B^{-4}\frac{k}{k^2-1}\,\Big(2k^3 + k - (1-4k^2)K(k)\Big)\ .$$

Wie man leicht mit Hilfe von (8.11) nachrechnet, ist $h'(k) = \frac{1}{6}\frac{1}{k^2-1}\,(2k^3 + k - (1-4k^2)K(k))$, so daß man π^1_1 auch als

$$\pi^1_1 = \rho\,g(k)$$

mit

$$g(k) := k\,\frac{h'(k)}{h(k)} = \frac{1}{3}k^{\frac{1}{3}}\frac{k}{k^2-1}\,\frac{2k^3 + k - (1-4k^2)\,K(k)}{k + K(k)}$$

schreiben kann.
Mit $\rho_0 := \gamma\frac{h\pi^2}{30}\,(T_0)^4$ gilt somit zusammenfassend

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \gamma\frac{h\pi^2}{30}\,{T_C}^4\,h(k) \\ &= \rho_0\,e^{-4\alpha}h(e^\beta) \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

$$P = \frac{1}{3}\,\rho$$

$$\left.\begin{aligned} \pi^1_1 &= \rho\,g(k) \\ &= \rho_0\,e^{-4\alpha}h'(e^\beta)\ . \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Diese Form für den Energie-Impuls-Tensor wurde zuerst in [33] vorgestellt. Für die Funktionen $h(k)$ und $g(k)$ sind die Beziehungen

$$h(0) = \infty\,,\quad h(1) = 1\,,\quad h(\infty) = \infty \tag{8.18}$$

$$g(0) = -\frac{1}{6}\,,\quad g(1) = 0\,,\quad g(\infty) = \frac{1}{3} \tag{8.19}$$

und die leicht nachzurechnenden Entwicklungen

$$\begin{aligned} h(k) &= 1 + \frac{8}{45}\,(k-1)^2 + \mathcal{O}((k-1)^3) \\ g(k) &= \frac{16}{45}\,(k-1) + \mathcal{O}((k-1)^2) \end{aligned}$$

interessant.

Wenn es sich bei den Teilchen um Bosonen ($\gamma = 1$) mit 2 inneren Freiheitsgraden ($h = 2$) handelt, also z.B. um Photonen, wird (8.16) für $k = 1$ zu

$$\rho = \frac{\pi^2}{15} {T_C}^4 \, .$$

Dieses ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz für schwarze Strahler.

8.4.2 Physikalische Größen für $m \gg T_C$

Wie in Unterabschnitt 8.3.3 erläutert werden für diese Näherung Terme vernachlässigt, die $\frac{1}{MB}$ oder $\frac{k}{MB}$ in höherer Ordnung enthalten.
Die aus (8.13) resultierenden Ausdrücke für die physikalischen Größen lauten

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{h}{2\pi^2} J_0 \, m \, (T_0)^3 B^{-3} k \\
P &= \frac{h}{6\pi^2} J_2 \, m^{-1} (T_0)^5 B^{-5} k \, (\frac{1}{3} k^2 + \frac{2}{3}) \\
\pi_1^1 &= \frac{h}{9\pi^2} J_2 \, m^{-1} (T_0)^5 B^{-5} k \, (k^2 - 1) \, .
\end{aligned}$$

Mit der Zentraltemperatur $T_C^M := m^{-1} (T_0)^2 e^{-2\alpha}$ aus Abschnitt 8.2 und den Abkürzungen $\rho_M := \frac{h}{2\pi^2} J_0 \, m (T_0)^3$ und $\pi_M := \frac{2h}{9\pi^2} J_2 \, m^{-1} (T_0)^5$ lassen sie sich auch schreiben als

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \frac{h}{2\pi^2} J_0 \, m^{\frac{5}{2}} \, {T_C^M}^{\frac{3}{2}} \\
&= \rho_M \, e^{-3\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{h}{6\pi^2} J_2 \, m^{\frac{3}{2}} \, {T_C^M}^{\frac{5}{2}} \, e^{-\frac{2}{3}\beta} \, (\frac{1}{3} e^{2\beta} + \frac{2}{3}) \\
&= \frac{3}{4} \pi_M \, e^{-5\alpha} e^{-\frac{2}{3}\beta} \, (\frac{1}{3} e^{2\beta} + \frac{2}{3}) \\
&= \frac{3}{4} \pi_M \, e^{-5\alpha} \, (1 + \frac{4}{9} \beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3))
\end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1^1 &= \frac{h}{9\pi^2} J_2 \, m^{\frac{3}{2}} \, {T_C^M}^{\frac{5}{2}} \, e^{-\frac{2}{3}\beta} \, (e^{2\beta} - 1) \\
&= \frac{1}{2} \pi_M \, e^{-5\alpha} e^{-\frac{2}{3}\beta} \, (e^{2\beta} - 1) \\
&= \pi_M \, e^{-5\alpha} \, \beta \, (1 + \mathcal{O}(\beta)) \, .
\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Die Energiedichte hängt also nur von α und nicht von β ab. Allerdings wurden diese Beziehungen nur unter der Bedingung abgeleitet, daß e^β nicht wesentlich größer als 1 ist.

9. Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

Nachdem die Krümmungsgrößen der Metrik und die Form des Energie-Impuls-Tensors berechnet wurden, kann man nun die Einsteinschen Feldgleichungen aufstellen. Da keine analytischen Lösungen für das so vorliegende System bekannt sind, ist man dabei auf Näherungslösungen und numerische Rechnungen auf dem Computer angewiesen.

9.1 Die Feldgleichungen

Mit dem Einstein-Tensor aus Kapitel 7 lauten die Feldgleichung für die Einsteinsche Theorie ohne kosmologische Konstante

$$\begin{aligned} 3\frac{B'^2}{B^2} - 2\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} &= \kappa T^{00} \\ -2\frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} &= \kappa T^1_1 \\ -2\frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} + 3\frac{B'}{B}\frac{k'}{k} - 2\frac{k'^2}{k^2} + \frac{k''}{k} &= \kappa T^2_2 \,. \end{aligned}$$

Die Feldgleichung für G^3_3 ist mit der für G^2_2 identisch.
Diese Gleichungen sind aber aufgrund der Bianchi-Identität nicht unabhängig voneinander, wie man an

$$\begin{aligned} 0 &= G^{ab}{}_{;b} \\ &= G^{00}{}_{,0} + (3\frac{B'}{B} - \frac{k'}{k})\, G^{00} + (\frac{B'}{B} - \frac{k'}{k})\, G^1_1 + 2\frac{B'}{B} G^2_2 \end{aligned}$$

sieht. Die G^{00}- und G^{11}-Feldgleichungen beschreiben daher das System vollständig.
Wenn man diese Gleichungen nach k' und B'' auflöst, erhält man die folgende Form, die später für die numerische Lösung am sinnvollsten ist:

$$\left.\begin{aligned} k' &= \tfrac{1}{2}k\,(3\tfrac{B'}{B} - \tfrac{B}{B'}\,\kappa T^{00}) \\ B'' &= -\tfrac{1}{2}B\,(\tfrac{B'^2}{B^2} + \kappa T^1_1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Mit den Größen α und β haben die Feldgleichungen die Gestalt

$$\begin{aligned} 3\,\alpha'^2 - \frac{1}{3}\,\beta'^2 &= \kappa T^{00} \\ -3\,(\alpha' + \frac{1}{3}\beta')^2 - 2\,\alpha'' - \frac{2}{3}\,\beta'' &= \kappa T^1_1\,. \end{aligned} \tag{9.2}$$

An der ersten Gleichung kann man

$$\frac{1}{3}\,\theta = \kappa\,\rho + \sigma^2$$

ablesen, was zu der Vermutung führt, daß ein nichtverschwindender Scherungsterm zu einer größeren Expansion führt.
Statt der Feldgleichung für G^{11} kann man auch die zu $(G^1_1 - G^2_2)$ gehörende betrachten. Wegen $\pi^1_1 = \frac{2}{3}(T^1_1 - T^2_2)$ liefert sie einen Ausdruck für den anisotropen Druck und hat zudem noch eine einfache Form. Durch einfaches Umformen erhält man nämlich

$$-2\,\alpha'\beta' - \frac{2}{3}\beta'' = \kappa\,\pi^1_1\ . \tag{9.3}$$

Vor allem wegen der komplizierten Form des Energie-Impuls-Tensors (im Fall $m \neq 0$ läßt er sich nicht einmal geschlossen angeben) existieren für dieses Differentialgleichungs-System keine analytischen Lösungen.

9.2 Näherungslösungen für kleine Anisotropie

Um wenigstens Näherungslösungen für die Feldgleichungen zu gewinnen, werden die beiden folgenden Annahmen gemacht:

$$\beta \ll 1\ , \quad \beta'^2 = 3\,\sigma^2 \ll \kappa\,\rho\ .$$

Gleichbedeutend damit ist

$$\ln k \ll 1\ , \quad \frac{k'^2}{k^2} \ll \kappa\,T^{00}\ .$$

Die daraus ableitbaren Vereinfachungen, die Inhalt dieses Abschnitts sind, stammen von Misner [24]. Mit den Annahmen wird die Feldgleichung (4.2) zu

$$3\,\alpha'^2 = \kappa\,T^{00}\ .$$

Das weitere Vorgehen hängt nun von den Grenzfällen $m = 0$ und $m \gg T_C$ ab.

9.2.1 Näherungslösung für $m = 0$

Für $\beta \ll 1$ hat T^{00} die Form (8.16) mit $h \approx 1$ (Gleichung (8.19)), so daß gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & 3\,\alpha'^2 & = & \kappa\,\rho_0\,e^{-4\alpha} \\ \Leftrightarrow & \alpha'\,e^{2\alpha} & = & (\frac{\kappa}{3}\,\rho_0)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow & e^{\alpha} & = & (\frac{4\kappa}{3}\,\rho_0)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{t - t_*} \end{array}$$

mit $t_* = const.$.
Für die Expansion resultiert

$$\theta = 3\,\alpha' = \frac{3}{2}\,\frac{1}{t - t_*}\ .$$

Dieses ist der Zeitverlauf der Friedmann-Lösungen für das Robertson-Walker-Modell, was man natürlich auch erwarten konnte, da die Anisotropieanteile für die Berechnung von α gerade vernachlässigt wurden.

Den zeitlichen Verlauf der durch β charakterisierten Anisotropie erhält man aus der Feldgleichung (9.3) und $\alpha' = \frac{1}{2t}$. Dazu gibt man π^1_1 die Form $\pi^1_1 = \frac{16}{45}\rho_0\,e^{-4\alpha}\beta$, die aus (8.17) und (8.19)

folgt:

$$\begin{aligned}
& & -2\frac{1}{2\,t}\,\beta' - \frac{2}{3}\beta'' &= \kappa\,\frac{16}{45}\rho_0\,e^{-4\alpha}\beta \\
&\Leftrightarrow & \frac{1}{t}\beta' + \frac{2}{3}\beta'' &= -\frac{4}{15}\frac{1}{t^2}\,\beta \\
&\Leftrightarrow & t^2\beta'' + \frac{3}{2}t\,\beta' + \frac{2}{5}\beta &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{d^2\beta}{d(\ln t)^2} - \frac{d\beta}{d(\ln t)} + \frac{3}{2}\frac{d\beta}{d(\ln t)} + \frac{2}{5}\beta &= 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{d^2\beta}{d(\ln t)^2} + \frac{1}{2}\frac{d\beta}{d(\ln t)} + \frac{2}{5}\beta &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dieses ist die homogene Schwingungsgleichung mit der bekannten Lösung [16]

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta_*\,e^{-\frac{1}{4}(\ln t)}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{20}}\,((\ln t) - \ln t_*)) \\
&= \beta_*\,t^{-\frac{1}{4}}\sin(\sqrt{\frac{27}{80}}\,\ln\frac{t}{t_*})\,, \qquad (9.4)
\end{aligned}$$

wobei β_* und t_* Integrationskonstanten sind.

9.2.2 Näherungslösung für $m \gg T_C$

Aus (8.20) folgt für die erste Feldgleichung

$$\begin{aligned}
& 3\,\alpha'^2 &= \kappa\,\rho_0\,e^{-3\alpha} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{\alpha} &= (\frac{3\kappa}{4}\,\rho_0)^{\frac{1}{3}}\,(t - t_*)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\theta = 2\,\frac{1}{t - t_*}\,.$$

Auch hier stimmt also die Zeitentwicklung von α' mit der Friedmann-Lösung überein.
Wegen der Form von π_1^1, Gleichung (8.22), enthält die zum Fall $m = 0$ analoge Differentialgleichung für β den Term $t^{-\frac{10}{3}}\beta$ und kann daher nicht mehr analytisch gelöst werden. Stattdessen kann man α als neue Zeitvariable einführen, d.h. man ersetzt Zeitableitungen nach t durch Ableitungen nach α. Wie im folgenden gezeigt wird, kann man auf diese Weise tatsächlich eine Lösung für $\beta(\alpha)$ und somit für $\beta(t)$ finden.
Dazu benutzt man zunächst die exakte erste Feldgleichung

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{1}{3}(\kappa T^{00} + \frac{1}{3}\beta'^2)} =: \sqrt{\rho_\alpha}\,,$$

um eine möglichst gute Kontrolle über die Größen zu haben, die später vernachlässigt werden. Für die zeitlichen Ableitungen von β erhält man so

$$\begin{aligned}
\beta' &= \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{\rho_\alpha} \\
\beta'' &= \frac{d}{dt}(\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{\rho_\alpha}) \\
&= \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\rho_\alpha + \frac{d\beta}{d\alpha}\,\frac{1}{2}\rho_\alpha^{-\frac{1}{2}}\,\frac{d\rho_\alpha}{dt} \\
&= \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\rho_\alpha + \frac{1}{6}\frac{d\beta}{d\alpha}\,\rho_\alpha^{-\frac{1}{2}}\left(\kappa\frac{dT^{00}}{d\alpha}\sqrt{\rho_\alpha} + \frac{2}{3}\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{\rho_\alpha}\,\beta''\right) \\
\Leftrightarrow\quad \beta'' &= \left(1 - \frac{1}{9}(\frac{d\beta}{d\alpha})^2\right)^{-1}\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\rho_\alpha + \frac{\kappa}{6}\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dT^{00}}{d\alpha}\right)\,.
\end{aligned}$$

Die zweite Feldgleichung ist damit äquivalent zu

$$-2\frac{d\beta}{d\alpha}\,\rho_\alpha - \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{9}(\frac{d\beta}{d\alpha})^2\right)^{-1}\left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\,\rho_\alpha + \frac{\kappa}{6}\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dT^{00}}{d\alpha}\right) = \kappa\,\pi_1^1\ .$$

Erst jetzt werden die beiden vereinfachenden Annahmen gemacht: Wegen $\beta \ll 1$ haben T^{00} und π_1^1 für $m \gg T_C$ die Form (8.20) bzw. (8.22). Wegen $\beta'^2 \ll \kappa T^{00}$, was gleichbedeutend ist mit $(\frac{d\beta}{d\alpha})^2 \ll 1$, ist $\rho_\alpha \approx \frac{\kappa}{3}T^{00}$ und $(1-\frac{1}{9}(\frac{d\beta}{d\alpha})^2) \approx 1$. Führt man diese Vereinfachungen durch, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(-2\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{2}{3}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)\frac{\kappa}{3}T^{00} - \frac{\kappa}{9}\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dT^{00}}{d\alpha} &= \kappa\,\pi_M\,e^{-5\alpha}\beta \\
\Leftrightarrow\quad -2\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{2}{3}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \frac{1}{3}\frac{d\beta}{d\alpha}(-3) + 3\frac{\pi_M}{\rho_M}\,e^{-2\alpha}\beta &= 0 \\
\Leftrightarrow\quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + \frac{3}{2}\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}\,e^{-2\alpha}\beta &= 0\ .
\end{aligned}$$

Mit der Funktion $\tilde{\beta}(\alpha) := \beta(\alpha)\,e^{\frac{3}{4}\alpha}$ läßt sich diese Differentialgleichung vereinfachen zu

$$\frac{d^2\tilde{\beta}}{d\alpha^2} + \left(\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}\,e^{-2\alpha} - \frac{9}{16}\right)\tilde{\beta} = 0\ . \tag{9.5}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist [16]

$$\tilde{\beta} = \beta_1\,J_{\frac{3}{4}}(\sqrt{\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}}\,e^{-\alpha}) + \beta_2\,Y_{\frac{3}{4}}(\sqrt{\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}}\,e^{-\alpha})\ ,$$

wobei J_n und Y_n die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art mit der Ordnung n und β_1 , β_2 beliebige Konstanten sind.
Da man für den hier untersuchten Fall $m \gg T_C$ aber nur an Lösungen für große Zeiten interessiert ist, kann man auch in Gleichung (9.5) den Term $\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}e^{-2\alpha}$ gegenüber $\frac{9}{16}$ vernachlässigen, da $e^\alpha \sim (t-t_*)^{\frac{2}{3}}$ ist. Man erhält dann

$$\frac{d^2\tilde{\beta}}{d\alpha^2} - \frac{9}{16}\,\tilde{\beta} = 0$$

mit der Lösung

$$\tilde{\beta} = \beta_1 e^{\frac{3}{4}\alpha} + \beta_2 e^{-\frac{3}{4}\alpha}\ , \quad \beta_1\ ,\ \beta_2 = const.\ .$$

Für β ergibt sich damit

$$\beta = \beta_1 + \beta_2\,e^{-\frac{3}{2}\alpha}$$

und daher mit einer Umbenennung der Konstanten

$$\beta = \beta_1 + \beta_2\frac{1}{t}\ , \quad \beta_1\ ,\ \beta_2 = const.\ . \tag{9.6}$$

Für k resultiert

$$k = e^{\beta_1}\,e^{\beta_2\frac{1}{t}}\ , \quad \frac{k'}{k} = -\beta_2\,\frac{1}{t^2}\ . \tag{9.7}$$

Die hier gefundenen Näherungslösungen stellen eine große Hilfe für die Diskussion der Ergebnisse der numerischen Simulation dar. In den Abschnitten 9.5 und 9.6 werden sie oft zum Vergleich herangezogen.

9.3 Das Anfangswertproblem

Um die Feldgleichungen zu lösen, muß man sich klarmachen, welches die unabhängigen Variablen sind und ob die Zeitentwicklung bereits vollständig determiniert ist. Zunächst führt man die beiden unabhängigen Feldgleichungen 2. Ordnung (9.1) auf 3 Gleichungen 1. Ordnung zurück:

$$\begin{aligned} k' &= \frac{1}{2}k\,(3\frac{B'}{B} - \frac{B}{B'}\,\kappa T^{00}) \\ B' &= C \\ C' &= -\frac{1}{2}B\,(\frac{B'^2}{B^2} + \kappa T^1_1)\ . \end{aligned}$$

Dazu wurde die Funktion $C(t) := B(t)'$ eingeführt, die von nun an zusammen mit k und B zu den unabhängigen Variablen zählen soll, so daß man drei Anfangsbedingungen für k, B und C angeben muß.
Wie in Abschnitt 8.1 besprochen soll die Berechnung der Lösungen der Feldgleichung zu dem Zeitpunkt t_0 beginnen, an dem k und B auf 1 gesetzt wurden:

$$A(t_0) = B(t_0) = k(t_0) = 1\ .$$

Daher hat man für das vorliegende System genau einen freien Parameter als dritte Anfangsbedingung, nämlich den Wert von C und somit von B' zum Zeitpunkt t_0. Die erste Feldgleichung liefert aber eine direkte Beziehung zwischen $B'(t_0)$ und $k'(t_0)$, so daß man auch k' zum Zeitpunkt t_0 vorgeben und dann $B'(t_0)$ der (nach B' aufgelösten) ersten Feldgleichung

$$B'(t_0) = \frac{1}{3}k'(t_0) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}\,\rho_0 + \frac{1}{9}\,k'(t_0)^2} \tag{9.8}$$

mit $\rho_0 = \rho(t_0) = \gamma\frac{h\pi^2}{30}(T_0)^4$ entnehmen kann. Das ist sogar die nützlichere Möglichkeit, da k' die Scherung der Metrik charakterisiert. Große $k'(t_0)$ entsprechen einer großen Anfangsanisotropie, kleine $k'(t_0)$ einer kleinen. Wegen $A'(t_0) = B'(t_0) - k'(t_0)$ gilt außerdem

$$A'(t_0) = -\frac{2}{3}k'(t_0) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}\,\rho_0 + \frac{1}{9}\,k'(t_0)^2}\ . \tag{9.9}$$

Damit erhält man die folgende Zuordnung:

$$\begin{array}{lcll} k'(t_0) \gg 0 & : & A'(t_0) \approx -\frac{1}{3}k'(t_0) & , \quad B'(t_0) \approx \frac{2}{3}k'(t_0) \\ k'(t_0) = 0 & : & A'(t_0) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}\rho_0} & , \quad B'(t_0) = \sqrt{\frac{\kappa}{2}\rho_0} \\ k'(t_0) \ll 0 & : & A'(t_0) \approx -k'(t_0) & , \quad B'(t_0) \approx \frac{3\kappa}{4}\rho_0\,\frac{1}{-k'(t_0)} \end{array}$$

Im Fall $k'(t_0) > 0$ würde sich das System aus einer „Zigarrensingularität“ mit stärkerer Expansion in der y-z-Ebene entwickeln, für $k'(t_0) < 0$ aus einer „Pfannkuchensingularität“ mit stärkerer Expansion in der x-Achse. Im ersten Fall kommt es dabei offensichtlich zu einer anfänglichen Kontraktion von A, wenn $k'(t_0) > \sqrt{\frac{3\kappa}{2}\,\rho_0}$ ist.
Das Verhältnis der Hubble-Parameter $\frac{A'}{A}$ und $\frac{B'}{B}$ ist wegen $\frac{A'}{B'}(t_0) \approx -\frac{1}{2}$ für $k'(t_0) \gg 0$ als Anfangswert weniger geeignet. Stewart [33] untersucht die Zeitentwicklung des Systems unter den Anfangsbedingungen $\frac{A'}{B'}(t_0) \gg 1$ und $\frac{A'}{B'}(t_0) \ll 1$ und kommt so zu der falschen Schlußfolgerung, daß man im zweiten Fall (der der Entwicklung aus der Zigarrensingularität entspricht) eine beliebig große Anfangsanisotropie vorgeben könnte, ohne die Zeitentwicklung wesentlich zu beeinflussen. Sein „Grenzfall“ $\frac{A'}{B'}(t_0) = 0$ entspricht aber natürlich einer endlichen und sogar sehr kleinen Anfangsanisotropie $k'(t_0) = \sqrt{\frac{3\kappa}{2}\rho_0}$.

Da man außerdem $\rho_0 = \gamma \frac{h\pi^2}{30}(T_0)^4$ einen Wert zuweisen muß, hat man sich nun zu entscheiden, welche Teilchensorte man betrachten will, um die Größen γ und h und die Größe des Parameters T_0 festzulegen. Dieser entspricht wegen $T_C = T_0\, B^{-1} k^{\frac{1}{3}}$ und $B(t_0) = k(t_0) = 1$ der Temperatur der Teilchen zum Zeitpunkt t_0.
Da ρ_0 aber die Einheit s^{-2} hat, kann man ρ_0 durch eine Umdefinition der Zeiteinheit jeden beliebigen (positiven) Wert geben. Für die Auswertung der numerischen Simulation, in der nur der einheitenlose Zahlenwert von ρ_0 auftaucht, muß man dann beachten, daß $k'(t_0)$ (mit der Einheit s^{-1}) einen entsprechend veränderten Wert hat und daß der Parameter t nun der Zeit in den neuen Zeiteinheiten entspricht. Etwas konkreter formuliert sind die Lösungen für ρ_0, $k'(t_0)$ nach einer Zeit t den Lösungen für $K\rho_0$, $\sqrt{K}\, k'(t_0)$ nach einer Zeit $K^{-\frac{1}{2}} t$ äquivalent (für $K > 0$). Diese Übereinstimmung muß natürlich auch bei der konkreten numerischen Simulation resultieren, so daß man einen einfachen Konsistenztest zur Verfügung hat (siehe Abschnitt 9.4).
Die in dieser Arbeit diskutierten qualitativen Eigenschaften der Lösungen der Feldgleichungen ergeben sich daher auch für geänderte Werte von T_0, h und γ. Im Fall $m \neq 0$ hängt die Form der Integrale J_0 und J_2, die in den Gleichungen (8.13) auftauchen, allerdings davon ab, ob Fermionen oder Bosonen beschrieben werden sollen. Für $m \gg T_C$ (und natürlich für $m \ll T_C$) schlägt sich diese Abhängigkeit aber wieder nur in einem konstanten Faktor nieder.
Wie in der Einleitung angesprochen soll in dieser Arbeit ein Gas aus Neutrinos beschrieben werden (genauer gesagt aus einer Neutrinosorte). Diese waren nach etwa $2\,s$ bei Temperaturen von ca. $10^{10}\,K$ von der übrigen Materie entkoppelt (siehe Abschnitt 3.3). Daher werden für die numerische Simulation die folgenden Zahlenwerte gewählt:

$$t_0 = 2\,s\,, \quad \gamma = \frac{7}{8}\,, \quad T_0 = 10^{10}\,K\,, \quad h = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = 0 \\ 2 & \text{für} \quad m \neq 0 \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung für den Wert von h drückt die Tatsache aus, daß massive Neutrinos im Gegensatz zu masselosen zwei Helizitätszustände besitzen. Die grundsätzlichen Eigenschaften der Ergebnisse sind aber wie gesagt unabhängig von diesen speziellen Werten.
Außerdem wurden alle Lösungen bis zu einer Zeit $t_E = 10^{22}\,s$ verfolgt. Die Wahl des Endpunkts der Simulation ist aber eine Darstellungsfrage und hat keine besondere Bedeutung.

9.4 Konsistenztests und Fehlerabschätzung

Bevor die Ergebnisse der numerischen Simulation diskutiert werden, soll zunächst etwas über die Zuverlässigkeit des numerischen Verfahrens ausgesagt werden. Dazu bietet sich als erstes ein einfacher Konsistenztest an: Für verschwindende Anfangsanisotropie müssen die berechneten Zeitverläufe für die Metrikfunktionen A und B mit der Friedmann-Lösung

$$R(t) = (\frac{4\kappa}{3}\,\rho_0)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{t - t_*}$$

übereinstimmen, wenn $m = 0$ ist. Für $m \gg T_C$ müssten sie

$$R(t) \sim (t - t_*)^{\frac{2}{3}}$$

mit einer von m abhängigen Proportionalitätskonstanten entsprechen. Wie auch in der Diskussion der Lösungen deutlich werden wird, ist tatsächlich kein Unterschied zwischen berechneten und exakten Lösungen erkennbar.
Ein anderer Konsistenztest beruht auf der im vorigen Abschnitt festgestellten Tatsache, daß die Lösungen, die man für einen geänderten Zahlenwert von ρ_0 erhält, in dem dort beschriebenen Sinne mit den alten Lösungen übereinstimmen müssen. Tatsächlich erfüllt die numerische Simulation diese Bedingung.

Der wichtigste Punkt ist sicherlich die Einschätzung des globalen Fehlers, der vor allem aus Rundungsfehlern des Computers entspringt. Da für $k'(t_0) \neq 0$ keine exakten Lösungen existieren, ist man dabei auf Vergleiche von Simulationsdurchläufen mit verschiedenen Parametern angewiesen. Vor allem der mit *eps* bezeichnete Parameter zur Steuerung der lokalen Genauigkeit der NAG-Routinen (siehe Anhang B) spielt dabei eine wichtige Rolle. Für den Fall $m \neq 0$ benötigt man außerdem einen Parameter *int_eps* für die Steuerung der numerischen Integration, die für die Berechnung von T^{00} und T^{11} nötig ist. Um einen Eindruck von den auftretenden Rundungsfehlern zu bekommen, kann man daher die Größen der freien Variablen k, B und B' für verschiedene Werte von *eps* und *int_eps* miteinander vergleichen. Die relativen Differenzen zum Zeitpunkt $t = 10^{22}\,s$ sind in der folgenden Tabelle aufgelistet, wobei als Bezugswerte 10^{-13} bzw. $10^{-12}/10^{-10}$ für *eps* bzw. *eps* und *int_eps* gewählt wurden.

Rundungsfehler für $m = 0$

Auswertung : bei $t = 10^{22}\,s$
Bezugswert : Genauigkeit 10^{-13}

	$k'(t_0) = -10^2\,s^{-1}$			$k'(t_0) = +10^4\,s^{-1}$		
Gen.	k	B	B'	k	B	B'
10^{-8}	$1\ 10^{-9}$	$4\ 10^{-10}$	$9\ 10^{-9}$	$2\ 10^{-8}$	$8\ 10^{-9}$	$6\ 10^{-9}$
10^{-10}	$4\ 10^{-10}$	$1\ 10^{-10}$	$3\ 10^{-10}$	$5\ 10^{-10}$	$2\ 10^{-10}$	$1\ 10^{-10}$
10^{-12}	$8\ 10^{-11}$	$2\ 10^{-11}$	$2\ 10^{-12}$	$5\ 10^{-12}$	$2\ 10^{-12}$	$4\ 10^{-13}$

Rundungsfehler für $m \neq 0$

Auswertung : bei $t = 10^{22}\,s$
Bezugswert : Genauigkeit 10^{-12} / 10^{-10}

$k'(t_0) = -10^2\,s^{-1}$

	0.1 eV			10 eV		
Gen.	k	B	B'	k	B	B'
$10^{-6}/10^{-3}$	$6\ 10^{-4}$	$2\ 10^{-4}$	$2\ 10^{-4}$	$6\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-5}$	$2\ 10^{-5}$
$10^{-8}/10^{-4}$	$2\ 10^{-8}$	$8\ 10^{-9}$	$8\ 10^{-9}$	$1\ 10^{-7}$	$4\ 10^{-8}$	$3\ 10^{-8}$
$10^{-10}/10^{-8}$	$1\ 10^{-9}$	$4\ 10^{-10}$	$2\ 10^{-10}$	$2\ 10^{-9}$	$5\ 10^{-10}$	$5\ 10^{-10}$

$k'(t_0) = +10^4\,s^{-1}$

	0.1 eV			10 eV		
Gen.	k	B	B'	k	B	B'
$10^{-6}/10^{-3}$	$2\ 10^{-5}$	$7\ 10^{-6}$	$7\ 10^{-6}$	$3\ 10^{-6}$	$8\ 10^{-7}$	$7\ 10^{-7}$
$10^{-8}/10^{-4}$	$1\ 10^{-7}$	$5\ 10^{-8}$	$4\ 10^{-8}$	$1\ 10^{-7}$	$4\ 10^{-8}$	$4\ 10^{-8}$
$10^{-10}/10^{-8}$	$1\ 10^{-9}$	$3\ 10^{-10}$	$2\ 10^{-10}$	$1\ 10^{-9}$	$4\ 10^{-10}$	$3\ 10^{-10}$

Offensichtlich sind die auftretenden globalen Fehler sehr klein. Für die Berechnung einiger Größen wie z.B des Anisotropieparameters können aber selbst solche kleinen Fehler zu großen Abweichungen führen. Der Anisotropieparameter errechnet sich nämlich als Differenz zweier Zahlen, die um Größenordnungen größer als er selber sind. Abgesehen von der Tatsache, daß der berechnete Wert dieser Größen dann nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt sinnvoll ist, treten dadurch aber keine Probleme auf.
Für die in dieser Arbeit abgebildeten Ergebnisse der Simulation wurden normalerweise die Werte 10^{-12} bzw. $10^{-10}/10^{-8}$ für *eps* und *int_eps* gewählt, da das Programm mit noch kleineren Werten teilweise nicht zurecht kam.

Schließlich sei noch angemerkt, daß die Benutzung der Näherungsformel für T^{ab} im Fall $k \in [1-10^{-7}, 1+10^{-7}]$ (siehe Abschnitt 8.3) zu keinem nachweisbaren globalen Fehler führt. Eine andere Wahl des Intervalls wie $[1-10^{-8}, 1+10^{-8}]$ oder $[1-10^{-6}, 1+10^{-6}]$ hatte nämlich keinen Einfluß auf die Größe der berechneten Variablen.

9.5 Der zeitliche Verlauf für $m = 0$

Für die Darstellung der Lösungen in dieser Arbeit seien einige Punkte angemerkt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird bei der Beschriftung der Kurven nur die Masse mit einer Einheit versehen. Größen wie $k'(t)$ sind immer in der Einheit s^{-1} zu verstehen. Der Zeitpunkt $6 \cdot 10^{17}\,s$ wird mit einem Pfeil an der Zeitachse markiert, da er dem ungefähren heutigen Weltalter von 20 Milliarden Jahren entspricht. Die Lösungen werden bis zu einer Zeit von $10^{22}\,s$ verfolgt.
Wegen der beliebig ansetzbaren Anfangsanisotropie und der Tatsache, daß dieses System nur eine Teilchensorte beschreibt und nicht als ein reales kosmologisches Modell dienen kann, wäre es dabei wenig sinnvoll, über die Diagrammbesprechung hinausgehende Aussagen über die exakten Zahlenwerte der Größen zu machen.

Am interessantesten ist sicherlich die Zeitentwicklung von $k(t)$, sie ist in Diagramm 1 illustriert.

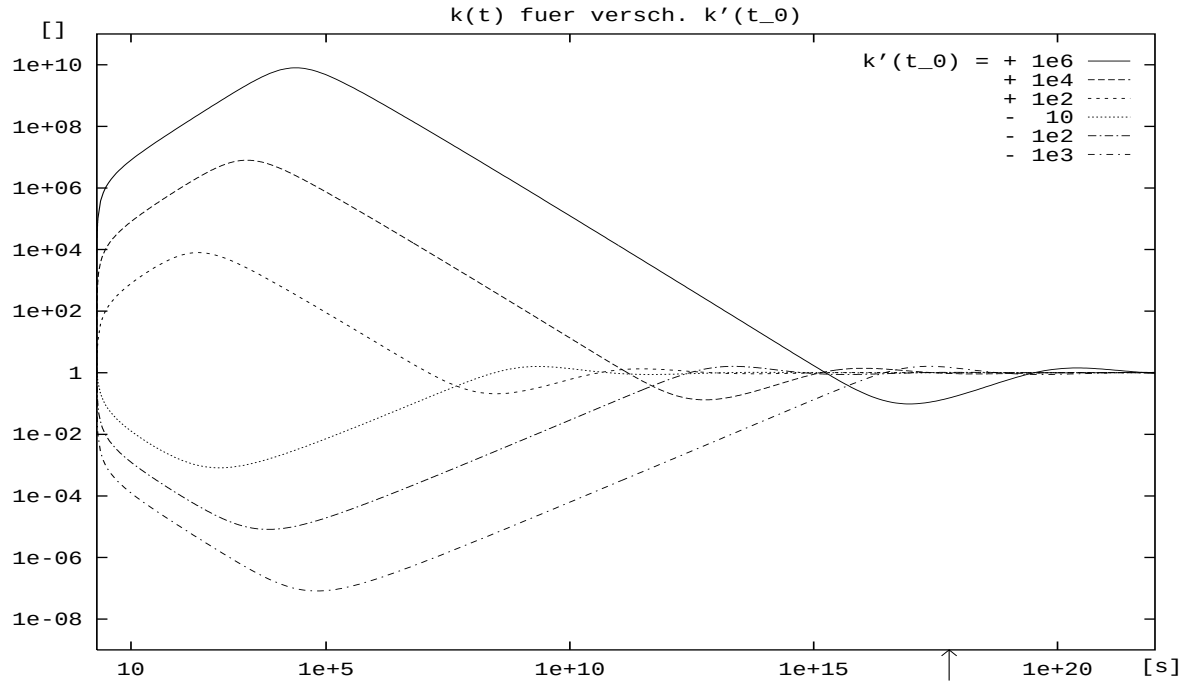
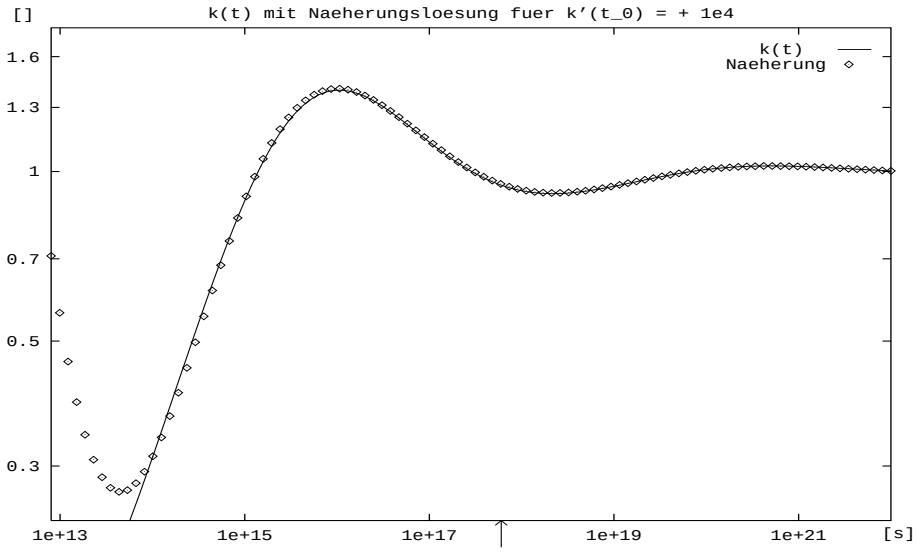


Diagramm 1

Die Bedeutung dieser Größe liegt darin, daß k ein Maß für die Temperaturanisotropie ist und da $k'(t)$ die Scherung und den Anisotropieparameter charakterisiert. S. Für $k = 1$ und $k' = 0$ erhält man die Robertson-Walker-Metrik mit der gewöhnlichen Friedmann-Zeitentwicklung. Tatsächlich gehen alle hier betrachteten Lösungen für große Zeiten in diesen Zustand über. Die Schnelligkeit dieser Annäherung hängt aber stark von der gewählten Anfangsbedingung ab.
Die mit k verknüpften physikalischen Größen und der genaue Verlauf von $A(t)$ und $B(t)$ werden zwar noch untersucht, aber schon diesem Diagramm ist zu entnehmen, daß die anfänglich vorgegebene Anisotropie im Laufe der Zeit abklingt, und zwar um so schneller, je kleiner die Anfangsanisotropie ist.
Da die Größe von $k'(t_0)$ wie in diesem Diagramm ersichtlich nur den zeitlichen Maßstab der Lösungen beeinflußt, werden im folgenden meistens nur die Fälle $k'(t_0) = +10^4$ und $k'(t_0) =$

-10^2 als typische Fälle untersucht. Dies bewahrt die Übersichtlichkeit der Darstellung.
Wenn k nahe 1 ist, kann man die numerische Lösung für $k(t)$ mit der Näherungslösung (9.4), deren freie Konstanten individuell anzupassen sind, vergleichen. Das Ergebnis wird in den Diagrammen 2 und 3 deutlich. Für andere Anfangswerte ergibt sich dabei ein völlig analoges Bild. Wie man sieht, ist Gleichung (9.4) für große Zeiten, bei denen $k \approx 1$ gilt, tatsächlich eine sehr gute Näherung. Außerhalb dieses Bereichs versagt sie erwartungsgemäß. Dieses unterstreicht noch einmal das Ergebnis, daß das Modell asymptotisch in das Friedmann-Modell übergeht.



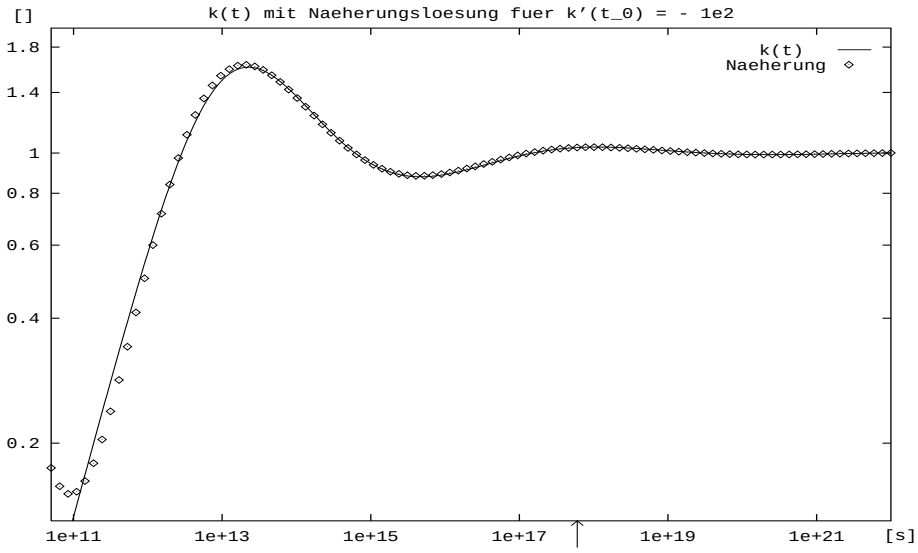
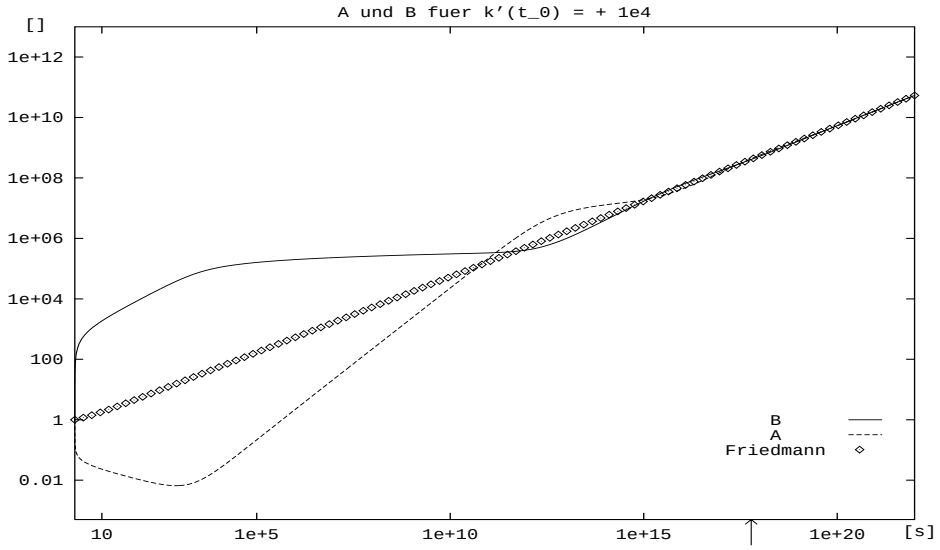


Diagramme 2,3

Der Zeitverlauf der Metrikfunktionen A und B hängt natürlich davon ab, ob die Expansion anfangs stärker in der x-y-Ebene ($k'(t_0) > 0$) oder in Richtung der z-Achse ($k'(t_0) < 0$) stattfindet. Im Diagramm 4 ist der Verlauf für $k'(t_0) = +10^4$ dargestellt. Wie im Abschnitt 9.3 vermutet kommt es zu einer anfänglichen Kontraktion von A, die dann in eine Expansion übergeht. Die Metrikfunktion B zeigt dagegen anfangs einen äußerst starken Anstieg. Diagramm 5 zeigt den Verlauf für $k'(t_0) = -10^2$. Wie man sieht, bleibt B bis etwa $10^3\ s$ praktisch konstant, während die Expansion von A zunächst viel stärker als im Friedmann-Modell ist.



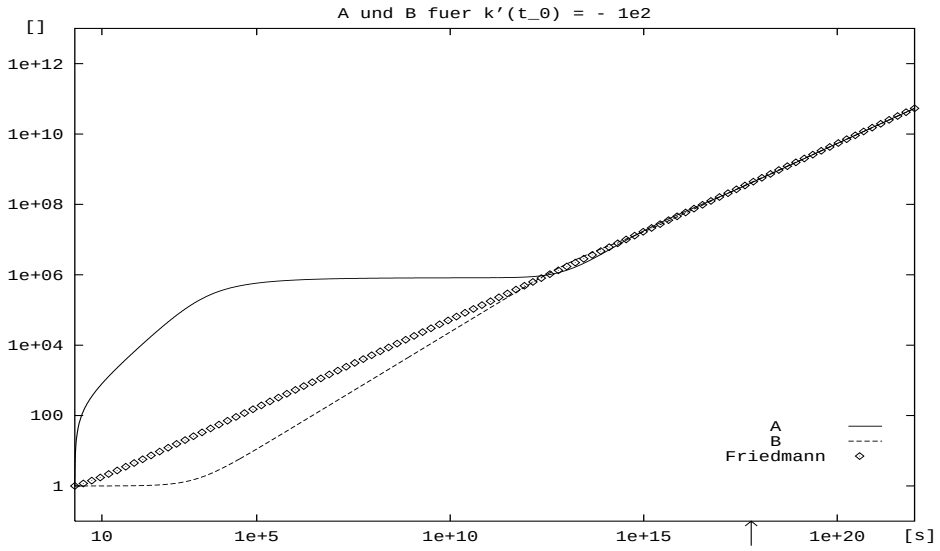
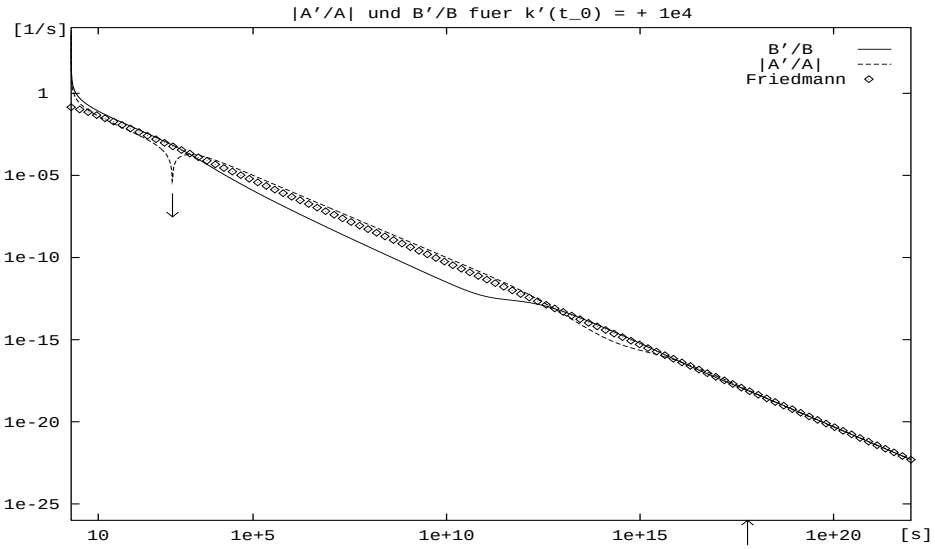


Diagramme 4,5

Die Diagramme 6 und 7 stellen den zeitlichen Verlauf der Hubble-Parameter $\frac{A'}{A}$ und $\frac{B'}{B}$ dar, im Grunde illustrieren sie nur die eben beschriebenen Kurven. Im Fall $k'(t_0) = +10^4$ ist dabei $\frac{A'}{A}$ wegen der anfänglichen Kontraktion von A zunächst negativ und wird dann positiv. Der Durchgang durch 0, den man in dem logarithmischen Diagramm nicht adäquat darstellen kann, wird dabei durch den Pfeil angedeutet.



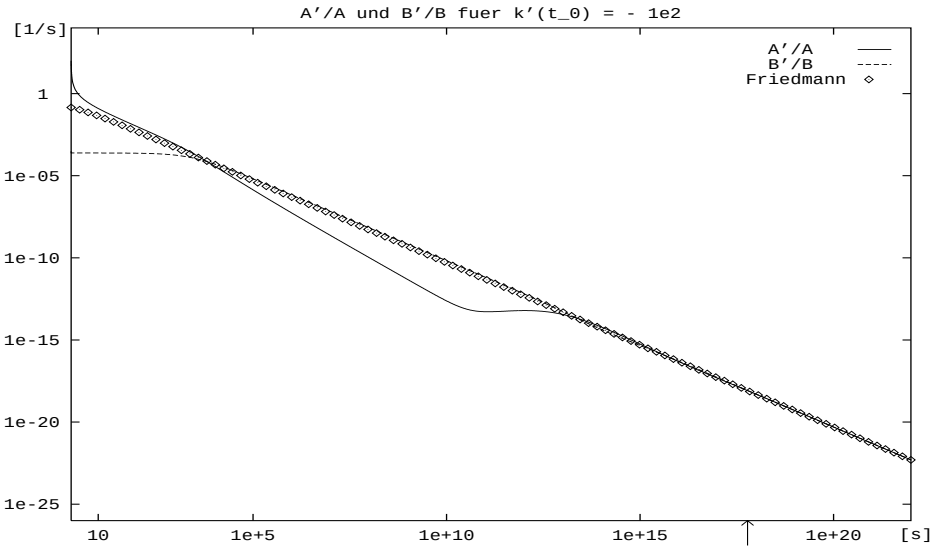
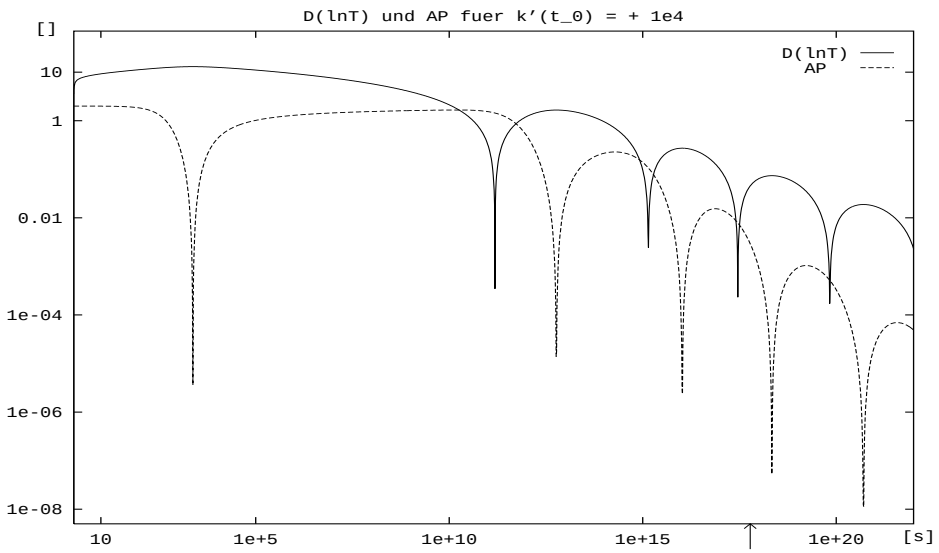
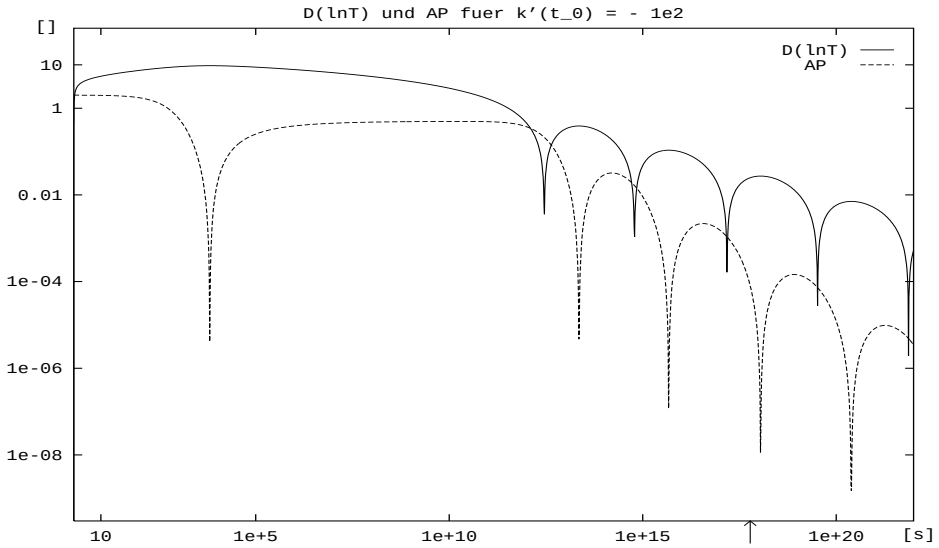


Diagramme 6,7

In den Diagrammen 8 und 9 soll gezeigt werden, wie der Zeitverlauf des Anisotropieparameters $\vartheta = 6\,\sigma^2/\theta$, in den Diagrammen mit „AP“ abgekürzt[1], und der Temperaturanisotropie $D(\ln T) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\ln k|$ aussieht. Den qualitativen Verlauf kann man dabei schon aus Diagramm 1 erahnen. Die Spitzen ergeben sich, da k für große Zeiten um 1 oszilliert, so daß die beiden Funktionen für alle Zeitpunkte, an denen $k' = 0$ bzw. $k = 1$ ist, den Wert 0 haben müßten. Das wird aber natürlich numerisch nicht exakt erreicht und ist in dem logarithmischen Diagramm auch gar nicht darstellbar. Die Länge und Ausgeprägtheit (nicht aber die zeitliche Lokalisation) dieser Spitzen sind daher auch eher Artefakte der Rundungsfehler des Computers und haben keine eigenständige Bedeutung. Man sieht aber, daß sowohl ϑ als auch $D(\ln T)$ für große Zeiten sehr klein werden, was mit der Näherungslösung (9.4) im Einklang steht.
Wie in den Diagrammen 10 und 11 sichtbar wird, führt ein kleinerer Anfangswert von k' zu deutlich kleineren Werten für diese Größen. Der qualitative Verlauf wird davon aber nicht berührt.

[1] Leider lassen sich mit diesem Plotprogramm keine griechischen Buchstaben ausgeben.





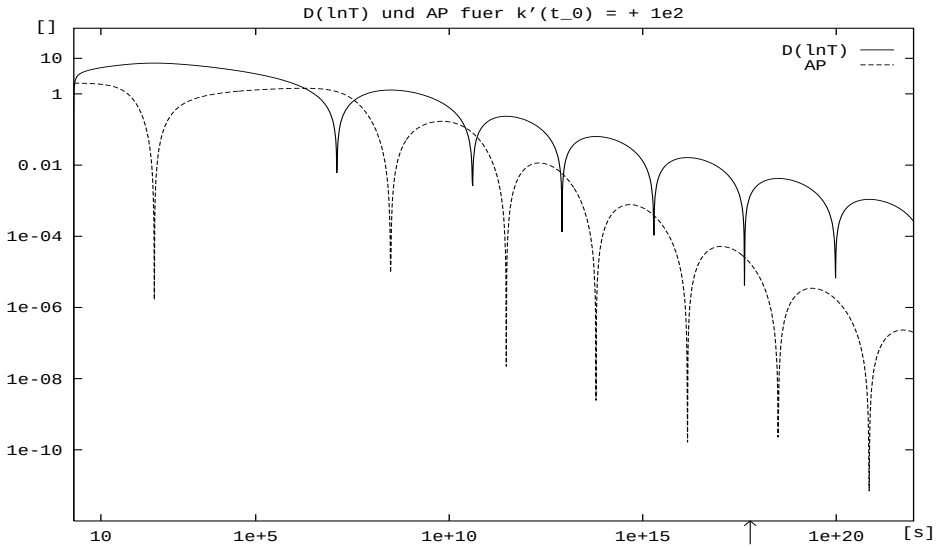


Diagramme 8-10

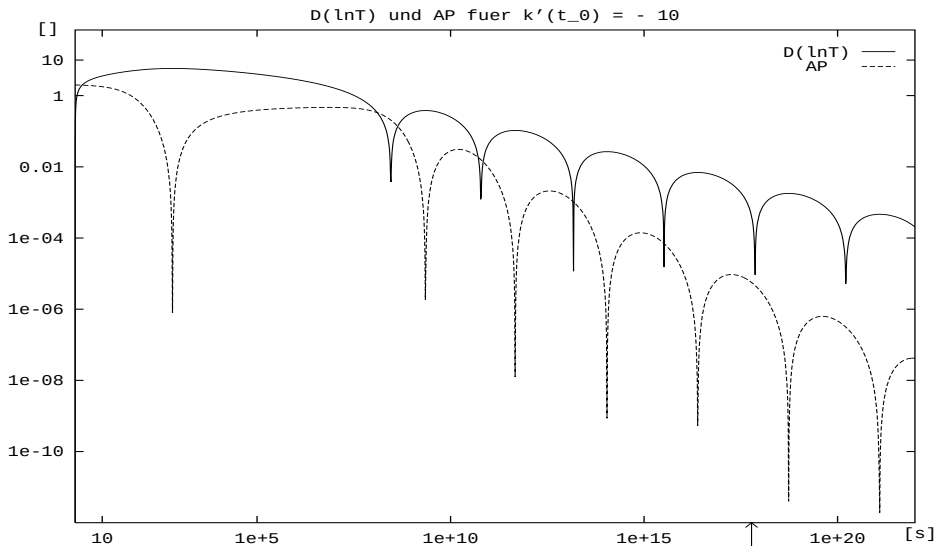


Diagramm 11

Interessant ist auch der zeitliche Verlauf der Größe $e^{\alpha} = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$. Er ist in den Diagrammen 12 und 13 dargestellt.
Bei einer großen Anfangsanisotropie kommt es zu Beginn unabhängig vom Vorzeichen von $k'(t_0)$ zu einem kurzen, aber äußerst starken Anstieg von e^{α}. Für große Zeiten erhält man den aus dem Friedmann-Modell bekannten Verlauf proportional zu $\sqrt{t - t_*}$. Daß eine nichtverschwindende Anisotropie zu einer stärkeren Expansion führt, wurde schon bei der Besprechung der ersten Feldgleichung in der Form (9.2) vermutet. Im Vergleich zu anderen Metrikgrößen ist der Verlauf von e^{α} aber insgesamt der Friedmann-Lösung sehr ähnlich.
Das drückt sich auch im Diagramm 14 in den physikalischen Größen der Zentralemperatur und der Energiedichte aus, die proportional zu $e^{-\alpha}$ bzw. $e^{-4\alpha}h(e^{\beta})$ sind.

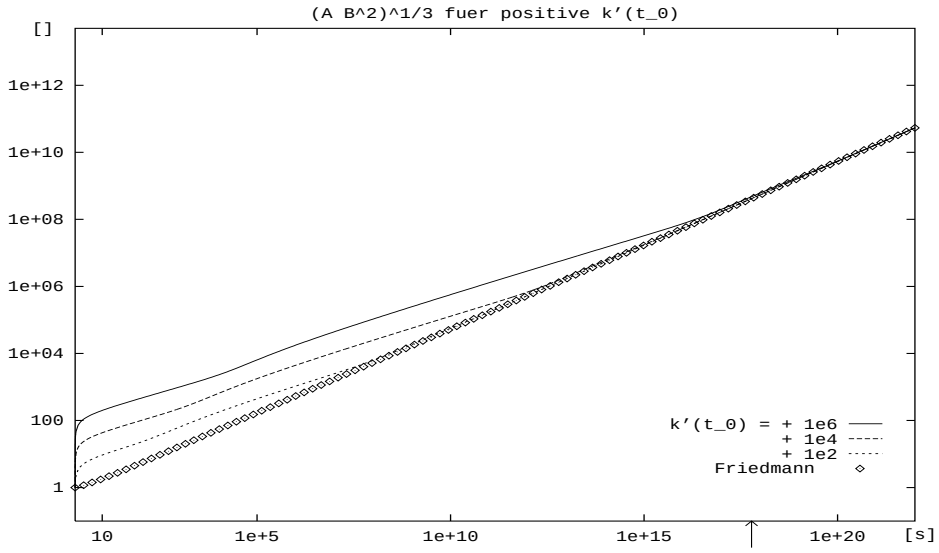


Diagramm 12

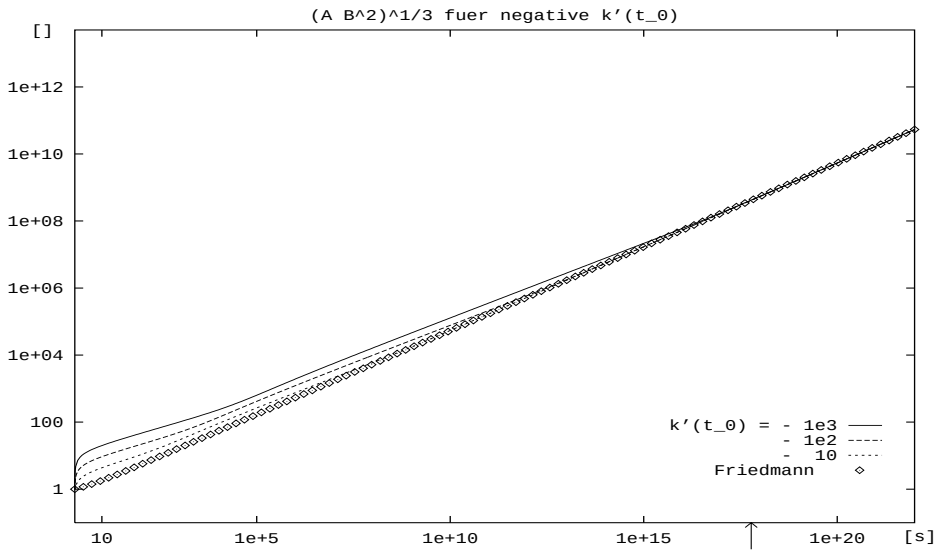


Diagramm 13

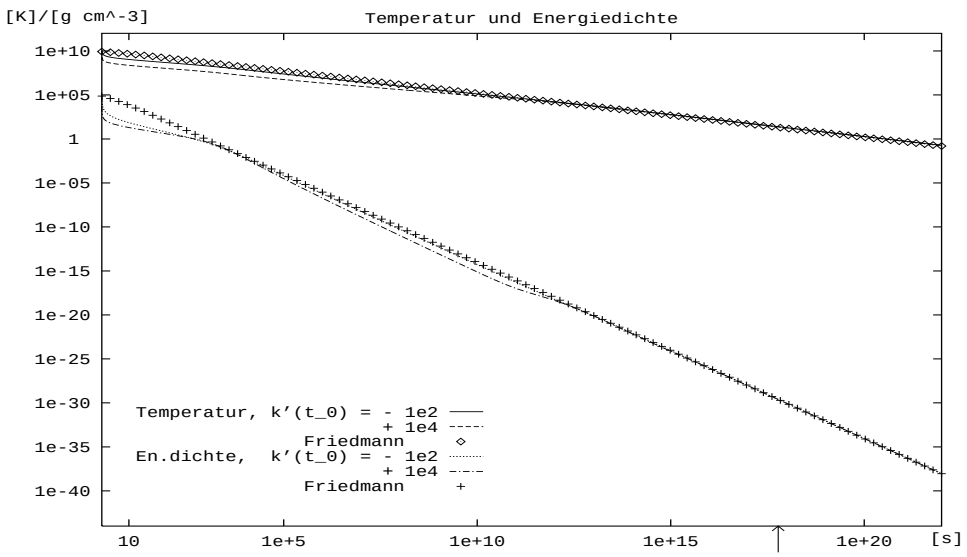


Diagramm 14

9.6 Der zeitliche Verlauf für $m \neq 0$

In dem Diagramm 15 ist der Zeitverlauf von $k(t)$ für eine Reihe von Anfangsbedingungen und eine Masse von 10 eV dargestellt.

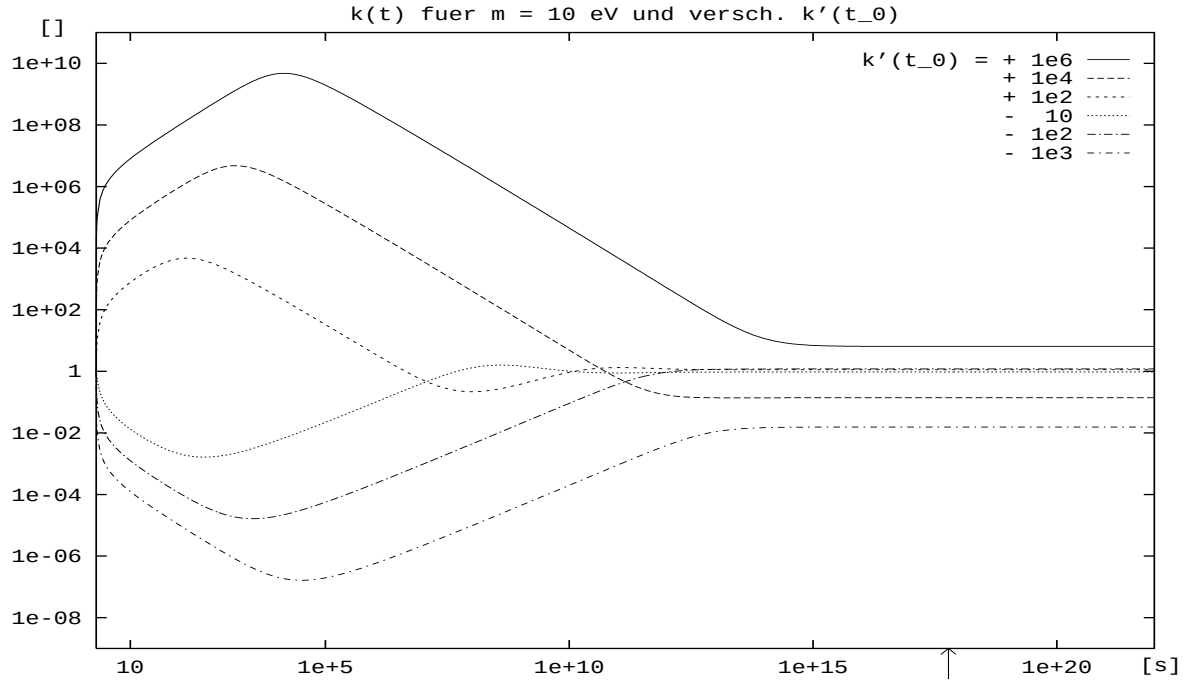
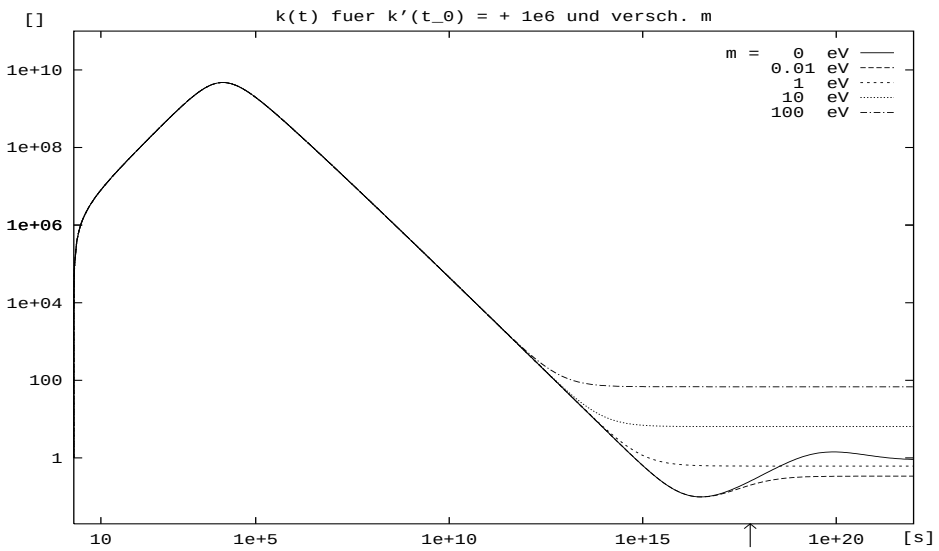
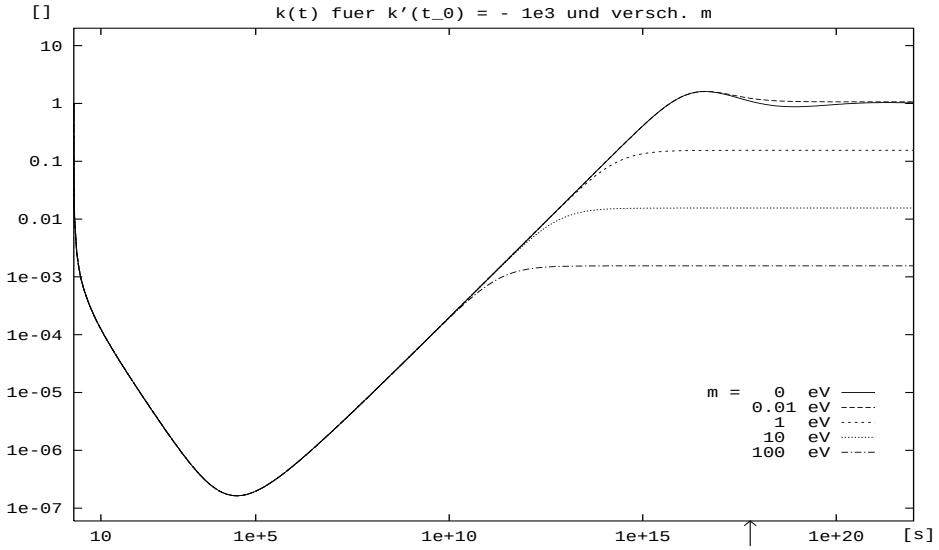


Diagramm 15

Erwartungsgemäß zeigt sich dabei für frühe Zeiten das gleiche Bild wie im Fall verschwindender Masse (Diagramm 1). Nach etwa $10^{12} - 10^{14}\,s$ nehmen aber alle Lösungen einen konstanten Verlauf. Die Größe von k zu dieser Zeit wird also sozusagen „eingefroren“ und erreicht nicht mehr asymptotisch 1. Die Näherungslösung (9.6) für $m \gg T_C$ beschreibt diesen Verlauf korrekt, was sich auch weiter unten bei der Besprechung des Anisotropieparameters zeigen wird.
Wie die Diagramme 16 und 17 zeigen, bestimmt die Größe der Masse den Zeitpunkt, an dem k konstant wird (natürlich geschieht dieses nicht instantan), da die Bedingung $m \gg T_C$ so zu früheren oder späteren Zeiten erfüllt ist. Hier wird auch deutlich, daß die (in die Temperaturanisotropie eingehende) Differenz von k zu 1 bei diesen Anfangsbedingungen stark von der Masse abhängt.
Auch der zeitliche Verlauf der Metrikfunktionen A und B gleicht wie in den Diagrammen 18-21 gezeigt natürlich im Bereich $m \ll T_C$ dem für $m = 0$. Dann aber lassen sich zwei Effekte der nichtverschwindenden Masse ausmachen. Erstens laufen die Lösungen für A und B zwar parallel zueinander, sie sind aber auch für große Zeiten nicht mehr identisch. Im Fall $m = 0.01eV$ ist dieses allerdings kaum auszumachen. Das spiegelt die oben besprochene Tatsache wieder, daß sich k einem konstanten Wert ungleich 1 nähert. Der zweite Effekt ist die systematische Abweichung von der Friedmannschen Strahlungslösung $R \sim \sqrt{t - t_*}$ für große Zeiten. Wie man bei der Analyse des Zeitverlaufs von $e^\alpha = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$ genauer sehen wird, gleicht die Lösung dann (bis auf die Anisotropieeffekte) der Friedmannschen Staublösung $R \sim (t - t_*)^{\frac{2}{3}}$.





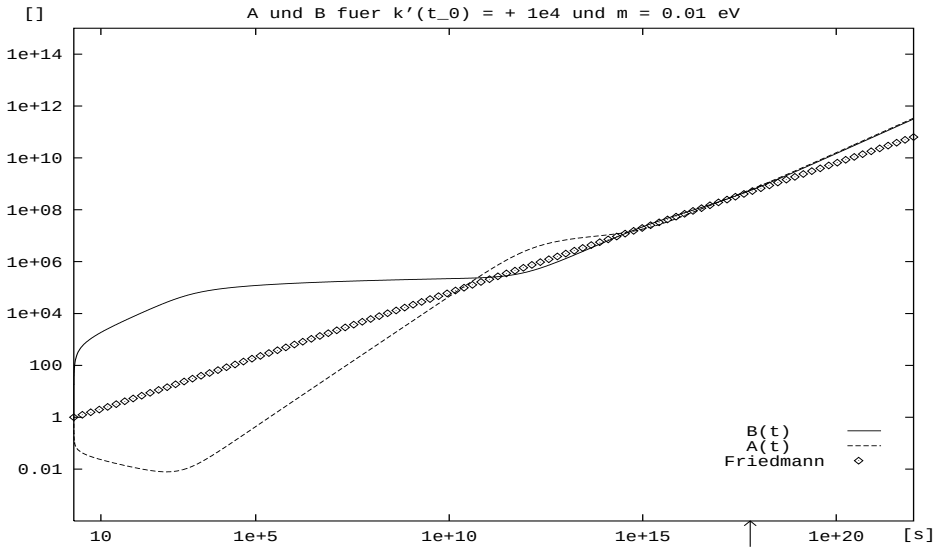
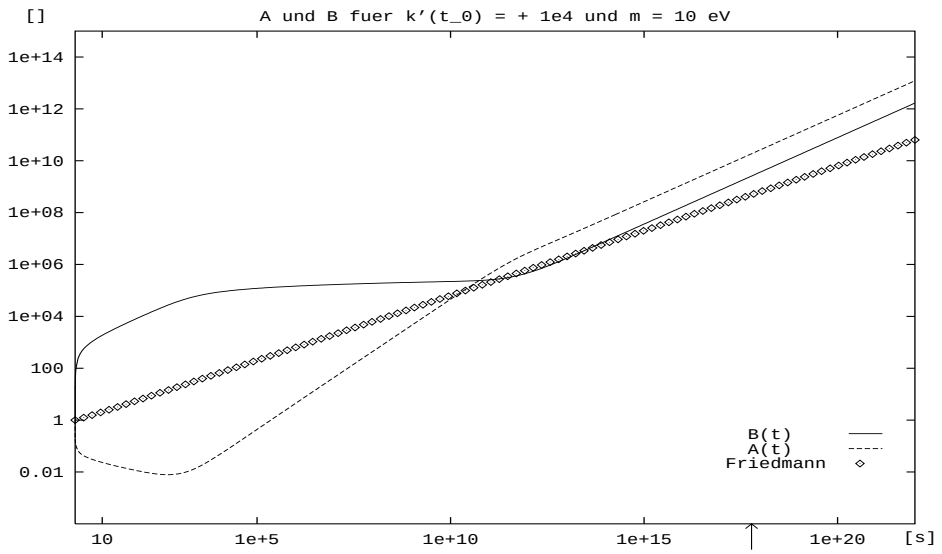
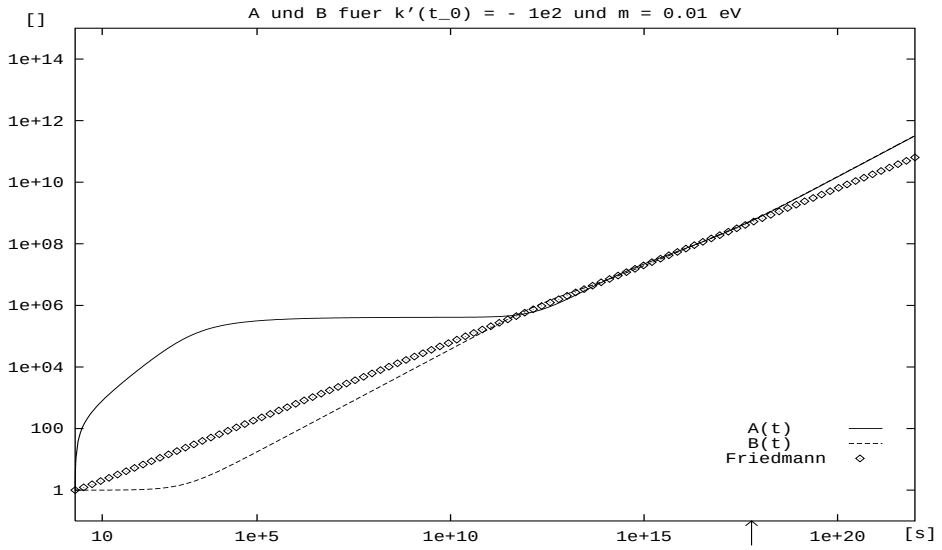


Diagramme 16-18





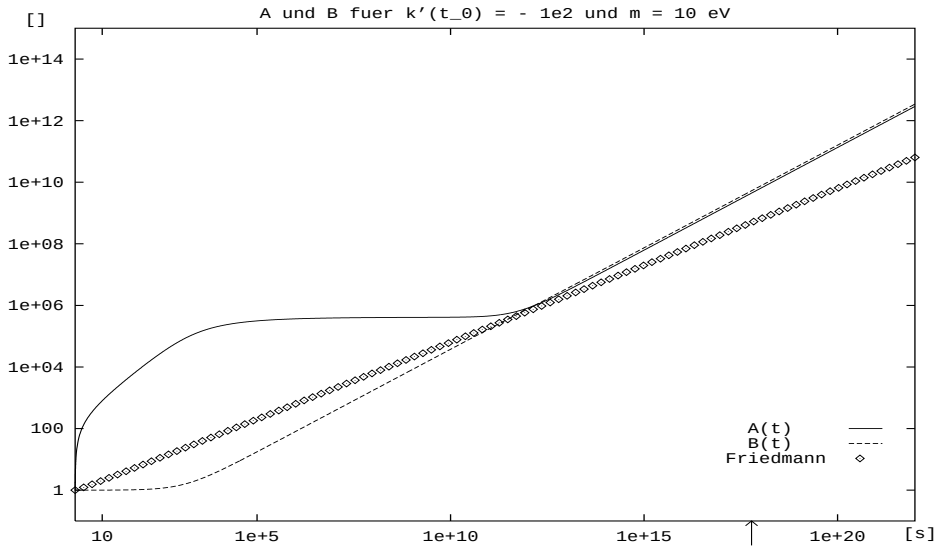


Diagramme 19-21

Diese Effekte spiegeln sich in den Hubble-Parametern kaum wieder. Die minimale Abweichung vom Strahlungsmodell ($\frac{2}{3}\frac{1}{t-t_0}-$ statt $\frac{1}{2}\frac{1}{t-t_0}-$Abfall) ist graphisch nicht gut darstellbar und enthält keine neuen Informationen.
Interessanter ist die Entwicklung der Temperaturanisotropie $D(\ln T)$. Der qualitative Verlauf läßt sich dabei schon aus dem Zeitverlauf von k entnehmen. Die Abhängigkeit von der Größe der Anfangsanisotropie wird an Diagramm 22 und 23 für $m = 10\,eV$ deutlich.

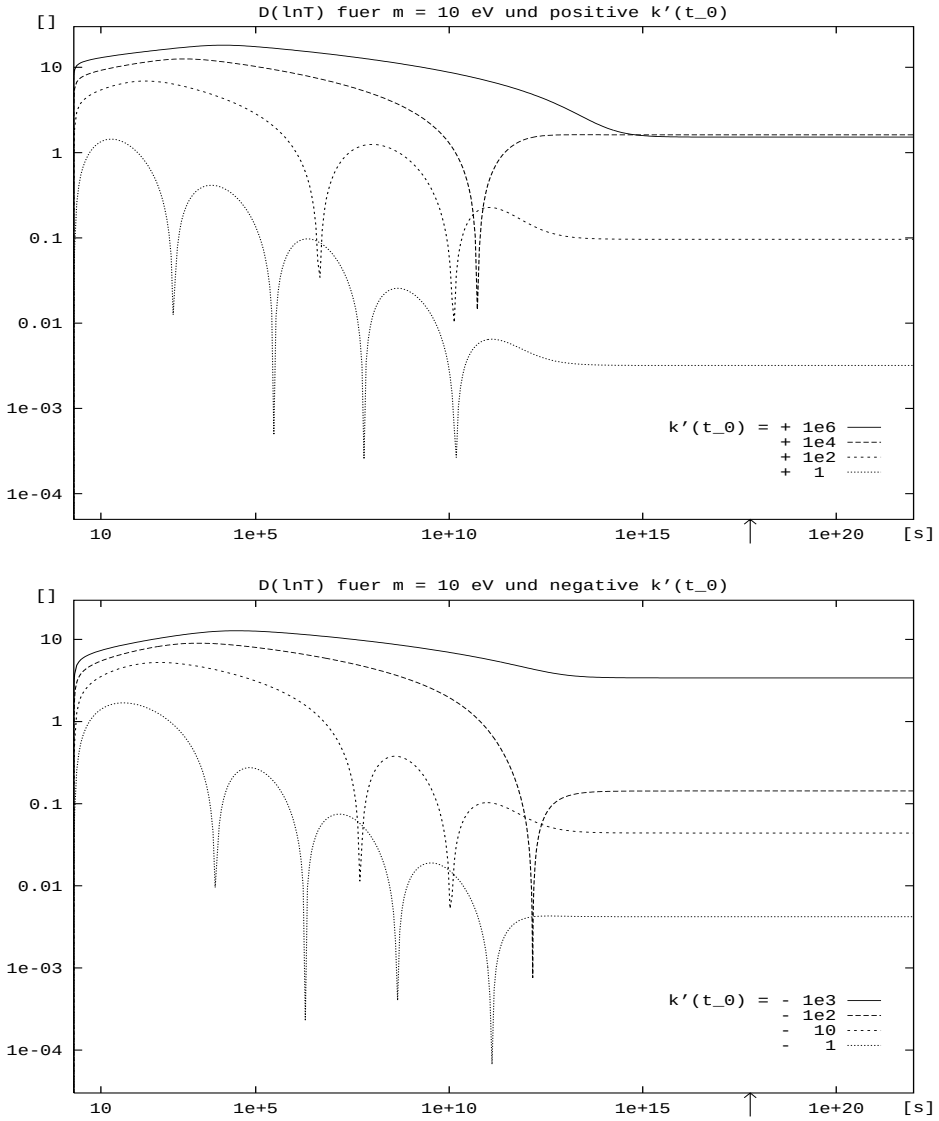
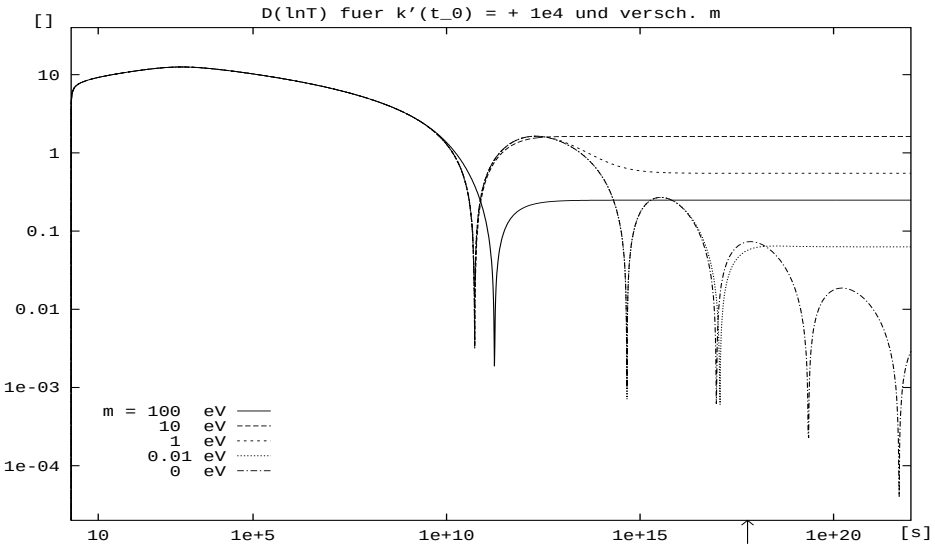


Diagramme 22,23

Wie man sieht, führt schon ein Anfangswert von $k'(t_0) = +10^2$ bzw. $k'(t_0) = -10$ zu einer heutigen Temperatur-Anisotropie von fast 0.1. Auch für noch kleinere $k'(t_0)$-Werte ergibt sich ein im Vergleich zum Fall $m = 0$ qualitativ anderer Verlauf. Die Abhängigkeit von der Masse wird in den Diagrammen 24 und 25 dargestellt.



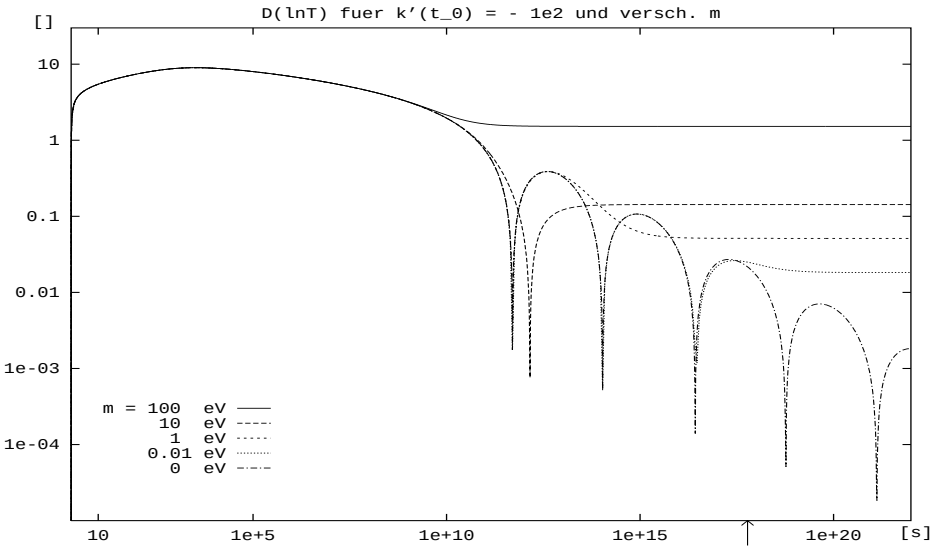
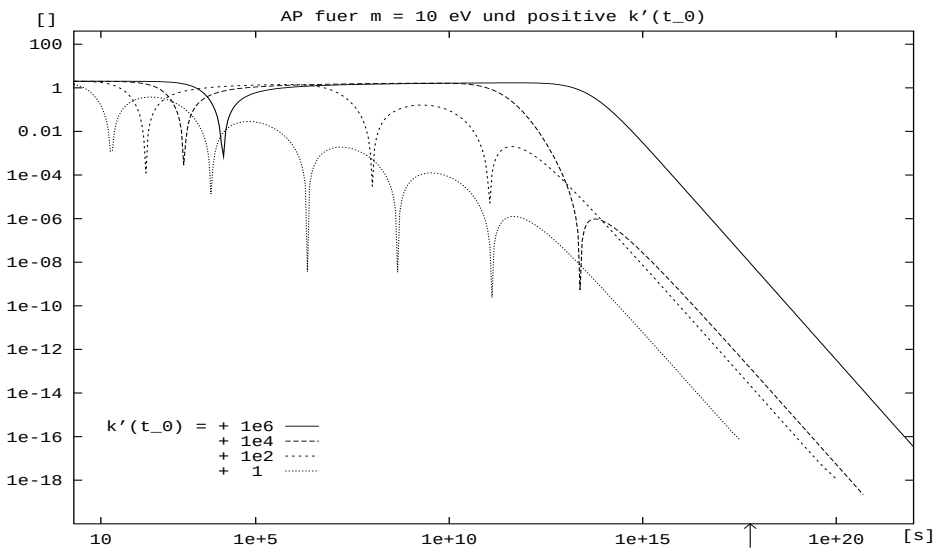
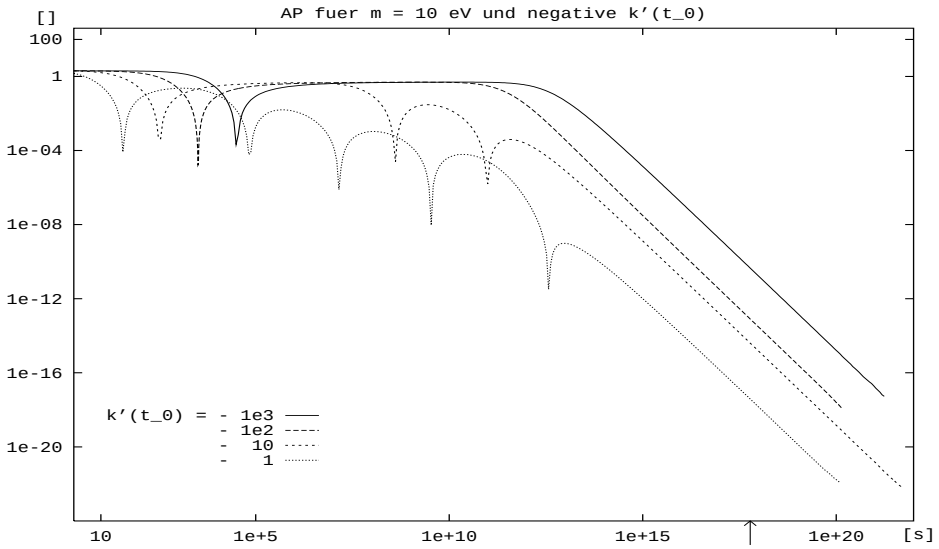


Diagramme 24,25

Da die Größe der Masse den Zeitpunkt bestimmt, an dem die Temperaturanisotropie „einfriert“, hängt $D(\ln T)$ empfindlich davon ab. Schon kleine Massen führen daher zu einem völlig anderen Bild als im Fall $m = 0$. Da $D(\ln T)$ aber für $m \gg T_C$ wegen der Oszillation von k um 1 Durchgänge durch 0 hat (das hieraus resultierende Darstellungsproblem wurde bereits besprochen) und nicht monoton fallend ist, führt eine größere Masse nicht unbedingt zu einer größeren Temperaturanisotropie. Dieses kann man an den Lösungen für $m = 100\,eV$ und $m = 10\,eV$ (Diagramm 24) bzw. $m = 10\,eV$ und $m = 1\,eV$ (Diagramm 25) sehen.
Obwohl die Temperaturanisotropie also sehr groß sein kann, fällt der Anisotropieparameter ϑ für $m \gg T_C$ viel schneller ab als im Fall $m = 0$. Diagramm 26 und 27 zeigen dabei die Abhängigkeit von der Anfangsanisotropie und die Diagramme 28 und 29 den Einfluß der Masse.
Dabei können wie in Abschnitt 9.4 angesprochen nicht alle Lösungen bis $10^{22}\,s$ verfolgt werden, da sich ϑ als Differenz zweier Zahlen errechnet, die um Größenordnungen größer als ϑ sind, so daß die Rundungsfehler des Computers irgendwann eine Berechnung unmöglich machen. Bei welchem Zeitpunkt dieses geschieht, ist dabei natürlich für die Interpretation der Lösung irrelevant.





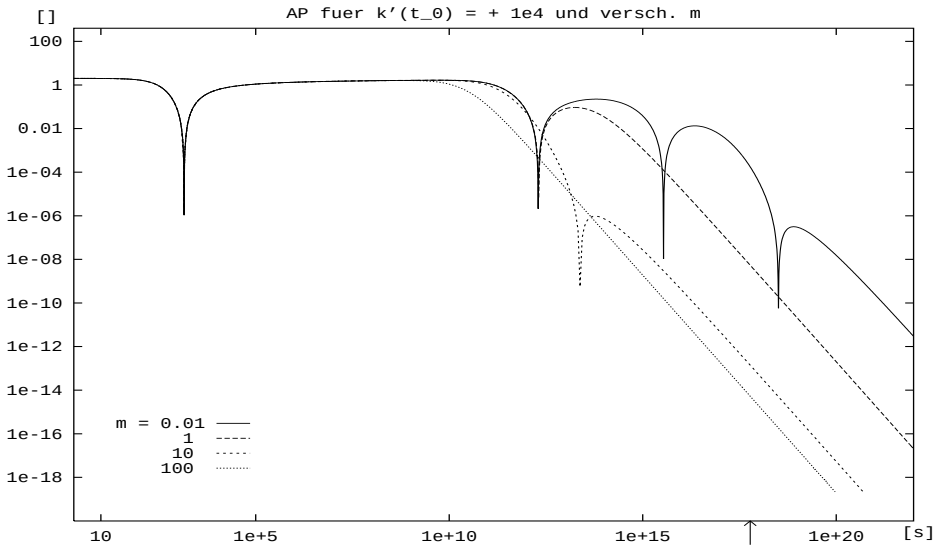


Diagramme 26-28

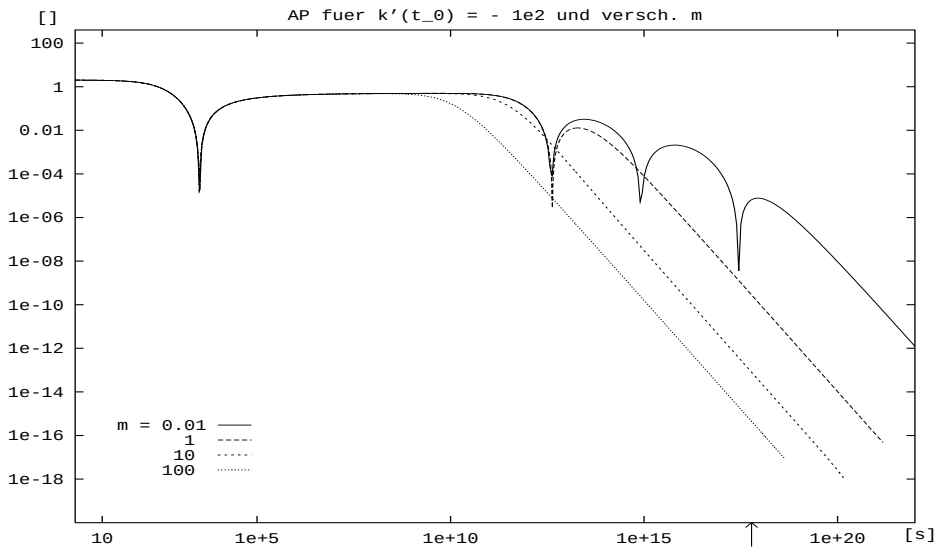


Diagramm 29

Wie nicht anders zu erwarten war, ist ϑ i.a. umso größer, je größer die Anfangsanisotropie ist. Die Abhängigkeit von der Größe der Masse ist aber wegen des schnellen Abfalls gerade umgekehrt: Große Massen führen zu einem kleinen Anisotropieparameter, kleine zu einem großem. Der qualitative Verlauf für $m \gg T_C$ ist aber für alle Massen und Anfangsbedingungen gleich und wird durch die Näherungslösung (9.6) beschrieben, die ein Abfallverhalten proportional zu t^{-2} vorhersagt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird diese Übereinstimmung nur für einige typische Lösungen in Diagramm 30 illustriert. Sie ergibt sich aber wie gesagt für alle.

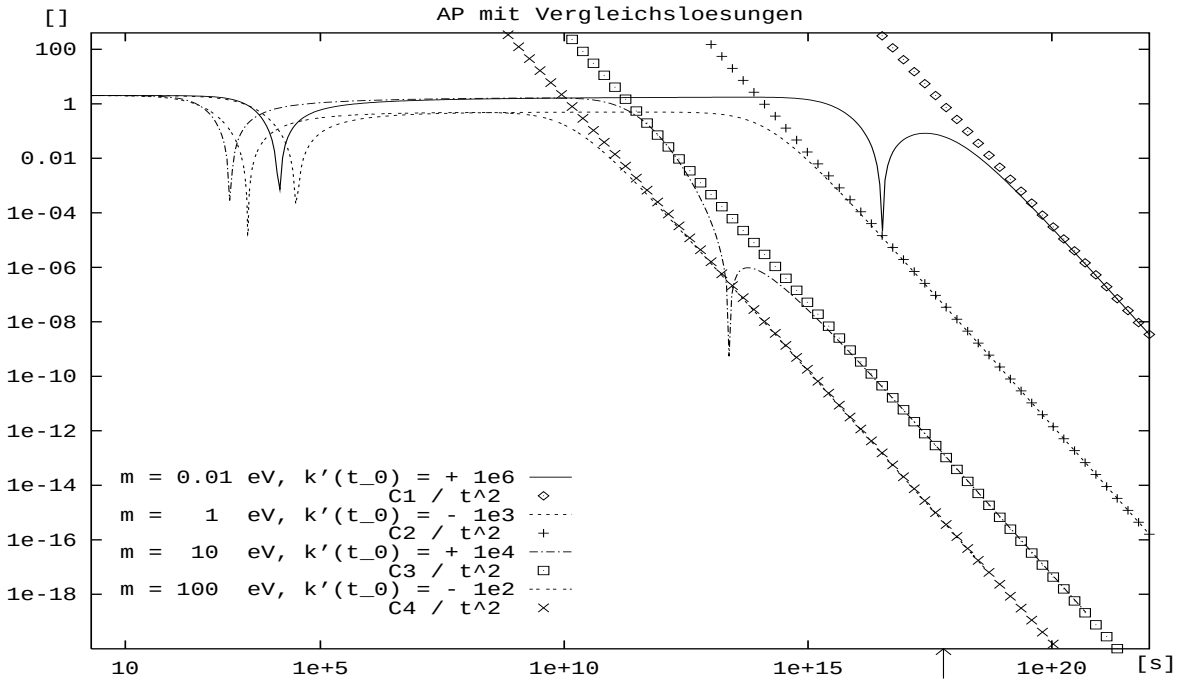
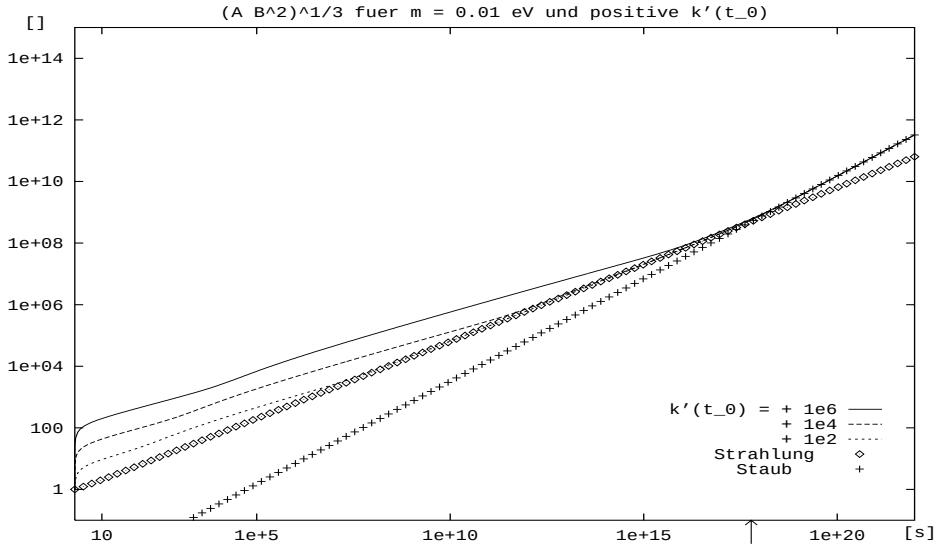


Diagramm 30

Schon bei der Besprechung der Metrikfunktionen klang an, daß das System zunächst in das Friedmannsche Strahlungsmodell übergeht, um sich dann für $m \gg T_C$ wie das Friedmannsche Staubmodell zu entwickeln. Dieser Sachverhalt wird in den Diagrammen 31 - 34 anhand des Zeitverlaufs von $e^\alpha = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$ besonders deutlich.
Für große $k'(t_0)$ ist dabei der Unterschied zum Staubmodell unerkennbar klein. Auch dieses ist eine Eigenschaft der Näherungslösung. Zu frühen Zeiten tritt wieder der Effekt auf, daß eine größere Anfangsanisotropie zu einer stärkeren Expansion führt.



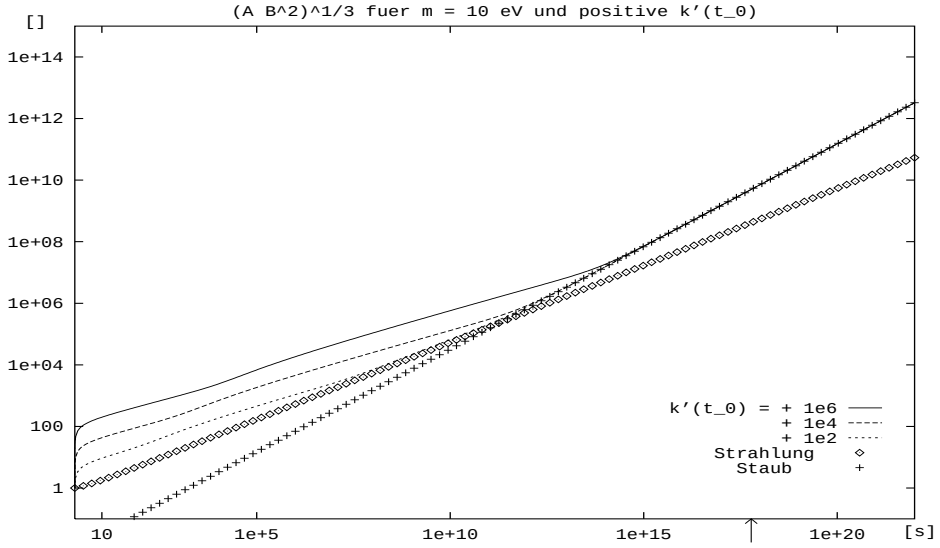
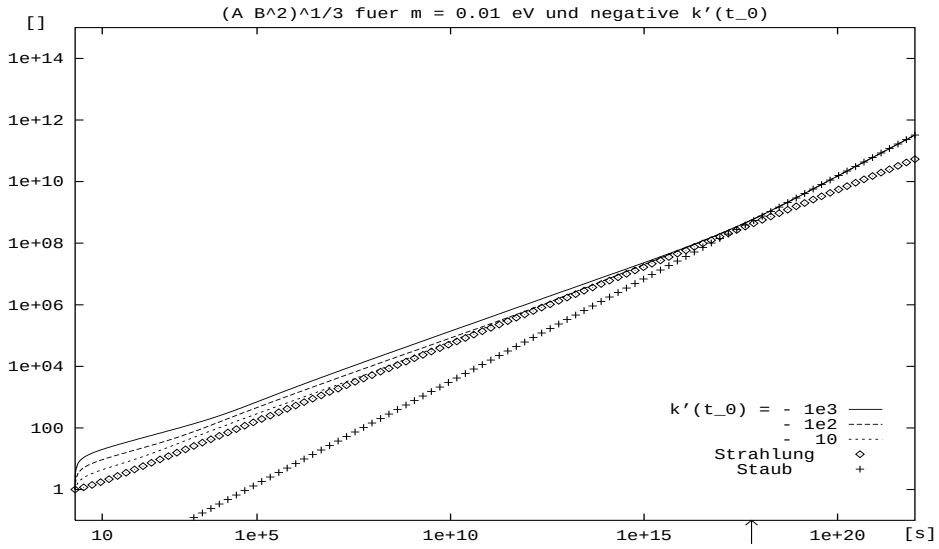


Diagramme 31,32



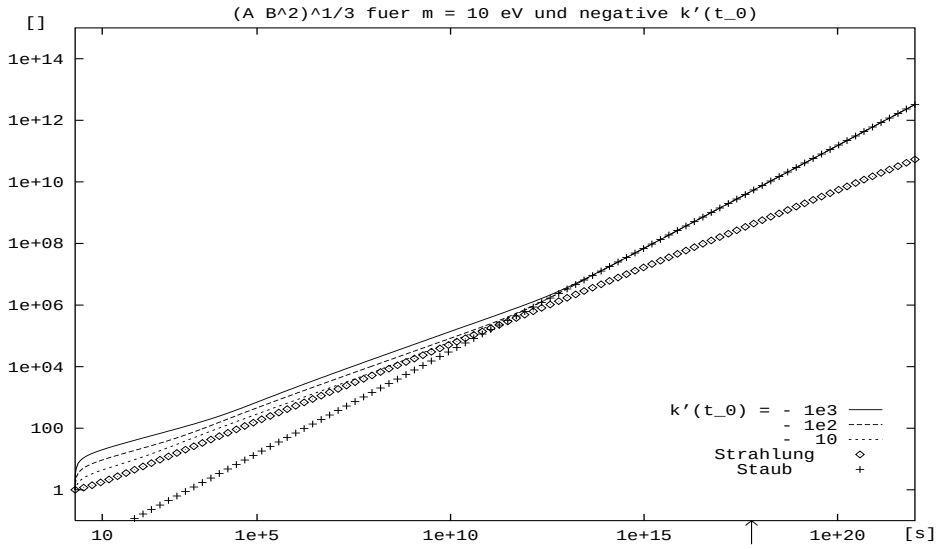


Diagramme 33,34

Am Ende des Abschnitts 10.7 findet sich eine kurze Zusammenfassung, die auch die wesentlichen Eigenschaften der gerade besprochenen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen zum Inhalt hat.

10. Lösung der Brans-Dicke-Feldgleichungen

Mit der vorgestellten Metrik und dem berechneten Energie-Impuls-Tensor kann man auch die Feldgleichungen in der Brans-Dicke-Theorie aufstellen. Diese Theorie wird in Anhang A.2 vorgestellt. Die Probleme, die bei der Lösung dieser Gleichungen auftreten, sind dabei ganz analog zum Einsteinschen System. Daher hat dieses Kapitel den gleichen grundsätzlichen Aufbau wie das vorige.

10.1 Die Feldgleichungen in der Brans-Dicke-Theorie

Für die axialsymmetrische Bianchi I - Metrik ergeben sich in der Brans-Dicke-Theorie die Zwischenresultate

$$\begin{aligned}
g^{ab}\varphi_{,a}\varphi_{,b} &= -(\varphi')^2 \\
\varphi_{,a;b} &= \varphi''\,\delta^0_a\delta^0_b - \frac{B^2}{k^2}\left(\frac{B'}{B}-\frac{k'}{k}\right)\delta^1_a\delta^1_b - BB'\,(\delta^2_a\delta^2_b+\delta^3_a\delta^3_b) \\
\Box\varphi &= -\varphi'' - \left(3\frac{B'}{B}-\frac{k'}{k}\right)\varphi'
\end{aligned}$$

und somit die Feldgleichungen

$$\begin{aligned}
G^{00} &= \frac{\kappa}{\varphi}T^{00} + \left(\frac{k'}{k}-3\frac{B'}{B}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\omega}{2}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \\
G^1_1 &= \frac{\kappa}{\varphi}T^1_1 + \left(\frac{k'}{k}-\frac{B'}{B}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\omega}{2}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{\Box\varphi}{\varphi} \\
&= \frac{\kappa}{\varphi}\left(T^1_1 - \frac{1}{3\omega+2}T^a{}_a\right) + \left(\frac{k'}{k}-\frac{B'}{B}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\omega}{2}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \\
\varphi'' &= -\frac{\kappa}{3+2\omega}T^a{}_a + \left(\frac{k'}{k}-3\frac{B'}{B}\right)\varphi'\,.
\end{aligned}$$

Aufgelöst nach k', B'' und φ'' erhält man

$$\left.\begin{aligned}
k' &= k\,(\frac{\varphi'}{\varphi}+2\frac{B'}{B})^{-1}\left(-\frac{\kappa}{\varphi}T^{00} + 3\frac{B'^2}{B^2} + 3\frac{B'}{B}\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\omega}{2}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right) \\
B'' &= -\frac{1}{2}B\left(\frac{B'^2}{B^2} + \frac{\kappa}{\varphi}\left(T^1_1 - \frac{1}{3+2\omega}T^a{}_a\right) + \left(\frac{k'}{k}-\frac{B'}{B}\right)\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\omega}{2}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right) \\
\varphi'' &= -\frac{\kappa}{3+2\omega}T^a{}_a + \left(\frac{k'}{k}-3\frac{B'}{B}\right)\varphi'\,.
\end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Für $m=0$ und somit $T^a{}_a = 0$ läßt sich die dritte Gleichung integrieren:

$$\begin{aligned}
\varphi'' &= \left(\frac{k'}{k}-3\frac{B'}{B}\right)\varphi' \\
\Leftrightarrow \qquad \varphi' &= \varphi'_0\,kB^{-3}\,, \quad \varphi'_0 = const.\ .
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Wie schon beim Einsteinschen System kann man für dieses Differentialgleichungs-System keine analytischen Lösungen angeben. Daher sollen zunächst die Lösungen für die Robertson-Walker-Metrik vorgestellt werden, die später zu Vergleichszwecken nützlich sind.

10.2 Exakte Lösungen für die Robertson-Walker-Metrik

Wenn die Materie in Form von Strahlung vorliegt ($m = 0$), hat die Robertson-Walker-Metrik mit Skalenparameter R in der Brans-Dicke-Theorie die Lösung [39]

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \varphi_*^{-\frac{1}{2}} \tau \, (K_1 + K_2 \, \tau^{-1})^{\frac{q+1}{2}} \\ \varphi(\tau) &= \varphi_* \, (K_1 + K_2 \, \tau^{-1})^{-q} \end{aligned}$$

mit

$$dt = R \, d\tau$$

und

$$\begin{aligned} q &:= (1 + \frac{2}{3}\omega)^{\frac{1}{2}} \, \frac{\varphi_0'}{|\varphi_0'|} \\ K_1 &:= \frac{\kappa}{3} \, \rho_0 \\ K_2 &:= (1 + \frac{2}{3}\omega)^{\frac{1}{2}} \, \varphi_0' \, , \quad \varphi_0' := \varphi'(t_0) \, . \end{aligned}$$

Man kann also R und φ nicht explizit als Funktion von t angeben, da man die Integration

$$t = \varphi_*^{-\frac{1}{2}} \, K_1^{\frac{q+1}{2}} \int_0^{\tau} \tilde{\tau}^{\frac{1-q}{2}} \, (\tilde{\tau} + \frac{K_2}{K_1})^{\frac{1+q}{2}} \, d\tilde{\tau}$$

durchführen und dann nach τ auflösen müßte.
Für $\tau \gg \frac{K_2}{K_1}$ und $\omega \gg 1$ ist dieses aber näherungsweise möglich, da man dann wegen $|q| \ll 1$ im obigen Integral $\frac{K_2}{K_1}$ gegenüber τ vernachlässigen kann. Das Ergebnis ist

$$t = \frac{1}{2} \varphi_*^{-\frac{1}{2}} K_1^{\frac{q+1}{2}} \tau^2 + t_*$$

(mit $t_* = const.$) und somit

$$\begin{aligned} R(t) &= \sqrt{2} \, \varphi_*^{-\frac{1}{4}} K_1^{\frac{q+1}{4}} \sqrt{t - t_*} \\ \varphi(t) &= \varphi_* \, K_1^{-q} = const. \; . \end{aligned}$$

Das System entspricht also für große Zeiten der Friedmann-Lösung.

Das Staub-Universum mit $P = 0$ hat die Lösung [4]

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 \, (\frac{t}{t_0})^q \\ \varphi(t) &= \varphi_0 \, (\frac{t}{t_0})^r \end{aligned}$$

mit

$$q := 2 \, \frac{1 + \omega}{4 + 3\omega} \, , \quad r := 2 \, \frac{1}{4 + 3\omega} \, .$$

Wenn $\omega \gg 1$ ist, gilt offensichtlich näherungsweise

$$\begin{aligned} R &= R_0 \, (\frac{t}{t_0})^{\frac{2}{3}} \\ \varphi &= \varphi_0 = const. \; , \end{aligned}$$

was der Zeitentwicklung der Friedmann-Lösung entspricht.
Die Tatsache, daß das Brans-Dicke-System für große Zeiten in das Einsteinsche übergeht, wird sich (mit gewissen Einschränkungen) auch für die in dieser Arbeit betrachtete Metrik ergeben.

10.3 Asymptotisches Verhalten und Näherungslösungen

Wegen der vielen freien Parametern ist es für die Untersuchung der Brans-Dicke-Feldgleichungen noch wichtiger als im Einsteinschen Fall, die qualitativen Eigenschaften der Lösungen und den Einfluß der Parameter direkt den Feldgleichungen zu entnehmen. Die so gewonnenen Aussagen müssen dann durch die numerische Simulation überprüft und konkretisiert werden.
Die wichtigste Erkenntnis, die natürlich erst bei der Besprechung der Ergebnisse der numerischen Simulation dokumentiert werden kann, ist dabei die Tatsache, daß alle Lösungen asymptotisch den Zeitverlauf der im vorigen Kapitel besprochenen Lösungen des Einsteinschen Systems annehmen. Dabei geht φ gegen einen konstanten Wert. Insbesondere strebt $k(t)$ einem konstanten Wert zu, der im Fall $m = 0$ gleich 1 ist, und die Expansion ist durch

$$e^{\alpha} \sim (t - t_*)^{\frac{1}{2}} \quad (m = 0) \qquad , \qquad e^{\alpha} \sim (t - t_*)^{\frac{2}{3}} \quad (m \gg T_C)$$

gekennzeichnet. Dabei ergeben sich allerdings i.a. andere Proportionalitätskonstanten als im Einsteinschen System. Im Fall $m \neq 0$ ist dieses Resultat in Strenge nur für den in dieser Arbeit betrachteten Zeitbereich gültig.

10.3.1 Eigenschaften für $m = 0$

Für den Fall $m = 0$ kann man sofort einsehen, daß das oben angesprochene Verhalten mit den Feldgleichungen konsistent ist. Der Entwicklungsgleichung (10.2) für φ kann man nämlich entnehmen, daß $|\varphi'|$ proportional zu $e^{-3\alpha}$ abfällt, so daß φ gegen einen konstanten Wert φ_E geht. Wenn man annimmt, daß $\frac{B'}{B} = \alpha' + \frac{1}{3}\frac{k'}{k}$ langsamer als $\frac{\varphi'}{\varphi} \sim e^{-3\alpha}$ abfällt, was für $e^{\alpha} \sim (t - t_*)^{\frac{1}{2}}$ offensichtlich erfüllt ist (wenn $\frac{k'}{k}$ nach oben beschränkt ist), kann man so die $\frac{\varphi'}{\varphi}$ - und $\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}$ - Terme in den Feldgleichungen für große Zeiten vernachlässigen und erhält

$$\begin{aligned} k' &= \frac{1}{2} k \frac{B}{B'} \left(-\frac{\kappa}{\varphi_E} T^{00} + 3\frac{B'^2}{B^2} \right) \\ B'' &= -\frac{1}{2} B \left(\frac{B'^2}{B^2} + \frac{\kappa}{\varphi_E} T^1_1 \right) . \end{aligned}$$

Dieses System gleicht dem Einsteinschen mit dem einzigen Unterschied, daß die Größen κT^{00} und κT^1_1 mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{\varphi_E}$ versehen sind. Man kann daher den Zeitverlauf

$$e^{\alpha} = (\frac{4\kappa}{3}\frac{1}{\varphi_E}\rho_0)^{\frac{1}{4}} (t - t_*)^{\frac{1}{2}}$$

erwarten. Die Näherungslösung (9.4) müßte den Verlauf von $k(t)$ sogar unverändert beschreiben können, da die rechte Seite von Gleichung (9.3) für $\beta \ll 1$ auch hier gleich $\frac{\kappa}{\varphi_E}\pi^1_1 = \frac{\kappa}{\varphi_E}\rho_0\, e^{-4\alpha}\frac{16}{45}\beta = -\frac{4}{15}\frac{1}{t^2}\beta$ ist.
Es ist außerdem festzuhalten, daß sich der Wert der Kopplungskonstanten ω für große Zeiten nur in der Größe von φ_E niederschlägt und daher keinen Einfluß auf den qualitativen Verlauf der Lösungen hat.

10.3.2 Eigenschaften für $m \neq 0$

Die Wirkung einer nichtverschwindenden Masse macht sich für $m \gg T_C$ in einem neuen Abfallverhalten von ρ und P derart bemerkbar, daß P gegen ρ vernachlässigt werden kann (siehe Unterabschnitt 8.4.2). Daher muß nun insbesondere der Term $T^a{}_a = 3P - \rho \approx -\rho$ in den Feldgleichungen berücksichtigt werden. Die Konsistenz mit den oben behaupteten Eigenschaften wird hier nicht so klar festzumachen sein. Die Überlegungen in diesem Abschnitt sollen ja aber

auch nur die gefundenen Lösungen der numerischen Simulation plausibel machen und die Strukturierung ihrer Darstellung erleichtern. Wenn man wie oben $\frac{\varphi'}{\varphi}$ - und $\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}$ - Terme gegenüber $\frac{B'}{B}$ vernachlässigen und $\varphi = \varphi_E = const.$ annehmen kann, erhält man analog zum Fall $m = 0$

$$e^{\alpha} = (\frac{3\kappa}{4}\frac{1}{\varphi_E}\rho_M)^{\frac{1}{3}}(t - t_*)^{\frac{2}{3}} .$$

Aus der Entwicklungsgleichung für φ wird somit wegen $\rho = \rho_M\, e^{-3\alpha}$

$$\begin{aligned} \varphi'' &= -\frac{\kappa}{3+2\omega}T^a{}_a - 3\alpha'\varphi' \\ &= \frac{\kappa}{3+2\omega}\rho_M\,(\frac{3\kappa}{4}\frac{1}{\varphi_E}\rho_M)^{-1}\frac{1}{t^2} - \varphi'\frac{1}{t} , \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} t^2\varphi'' + 2t\,\varphi' &= \frac{4}{3}\varphi_E\,\frac{1}{3+2\omega} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{d(\ln t)^2} + \frac{d\varphi}{d(\ln t)} &= \frac{4}{3}\varphi_E\,\frac{1}{3+2\omega} . \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist [16]

$$\varphi = C_1 + C_2\,\frac{1}{t} + \frac{4}{3}\varphi_E\,\frac{1}{3+2\omega}\,\ln t$$

mit C_1 , $C_2 = const.$. Offensichtlich ist die Aussage, daß φ einem konstanten Wert zustrebt, nach dieser Rechnung im Grunde falsch. Allerdings wird der Term proportional zu $(\ln t)$ für $\omega > 500$ erst relevant, wenn $(\ln t)$ von der Größenordnung 10^3 ist (wenn φ und φ_E von ähnlicher Größenordnung sind). Für die in dieser Arbeit untersuchten Zeitbereiche bis 10^{22} s spielt dieser Term somit keine Rolle, was sich auch in der Diskussion der Lösungen im Abschnitt 10.7 zeigen wird. Daher lassen sich auch hier $\frac{\varphi'}{\varphi}$ - und $\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}$ - Terme gegenüber $\frac{B'}{B} \approx \frac{2}{3}\,t^{-1}$ vernachlässigen, was ja bereits ausgenutzt wurde.
In der zweiten Feldgleichung taucht der zusätzliche Term $T^a{}_a$ auf:

$$B'' = -\frac{1}{2}B\left(\frac{B'^2}{B^2} + \frac{\kappa}{\varphi_E}(T^1_1 - \frac{1}{3+2\omega}T^a{}_a)\right) .$$

In den Rechnungen von Abschnitt 9.2 muß man daher $\kappa\,\pi^1_1$ durch $\frac{\kappa}{\varphi_E}(\pi^1_1 + \rho)$ ersetzen, was zu der zu (9.5) analogen Gleichung

$$\frac{d^2\tilde{\beta}}{d\alpha^2} + \left(\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}\,e^{-2\alpha} - \frac{9}{16}\right)\tilde{\beta} + \frac{1}{3+2\omega} = 0 .$$

mit $\tilde{\beta} = e^{\frac{3}{4}\alpha}\beta$ führt, wie man leicht nachrechnet. Wenn man wieder den Term $\frac{9}{2}\frac{\pi_M}{\rho_M}\,e^{-2\alpha}$ gegenüber $\frac{9}{16}$ vernachlässigt, erhält man auf diese Weise

$$\frac{d^2\tilde{\beta}}{d\alpha^2} - \frac{9}{16}\tilde{\beta} + \frac{1}{3+2\omega} = 0$$

mit der Lösung [16]

$$\tilde{\beta} = \frac{16}{9}\frac{1}{3+2\omega} + \beta_1\,e^{\frac{3}{4}\alpha} + \beta_2\,e^{-\frac{3}{4}\alpha} , \quad \beta_1 ,\ \beta_2 = const. .$$

Für β resultiert

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_1 + \frac{16}{9}\frac{1}{3+2\omega}\, e^{-\frac{3}{4}\alpha} + \beta_2\, e^{-\frac{3}{2}\alpha} \\ &= \beta_1 + \beta_* \frac{1}{\sqrt{t}} + \beta_2\, \frac{1}{t}\end{aligned}$$

mit einer Umdefinition von β_2 und

$$\beta_* := \frac{16}{9}\frac{1}{3+2\omega}\left(\frac{3\kappa}{4}\frac{1}{\varphi_E}\rho_M\right)^{-\frac{1}{4}} .$$

Die Aussage, daß $\beta = \ln k$ einem konstanten Wert zustrebt, bleibt also erhalten. Das Abfallverhalten wird nun aber durch

$$\beta' = \frac{k'}{k} = -\frac{1}{2}\beta_* \frac{1}{t\sqrt{t}} - \beta_2\, \frac{1}{t^2}$$

beschrieben. Der Faktor β_* hat dabei die zahlenmäßige Größe

$$\beta_* \approx 5 \cdot 10^{-2}\, \frac{10^3}{3+2\omega}\, \varphi_E^{\frac{1}{4}}\, (\frac{m}{10eV})^{-\frac{1}{4}}\, \sqrt{s} .$$

Für die in dieser Arbeit betrachteten Parametergrößen (siehe Abschnitt 10.7) spielt der neue Term $\beta_* t^{-\frac{3}{2}}$ somit keine Rolle.
Rückblickend kann man schließlich noch feststellen, daß man von den Größen, in die die Kopplungskonstante ω eingeht, keinen Einfluß auf den Zeitverlauf der Lösungen erwarten kann. Der Wert von ω hat daher für $m \gg T_C$ keinen Einfluß.

10.4 Das Anfangswertproblem

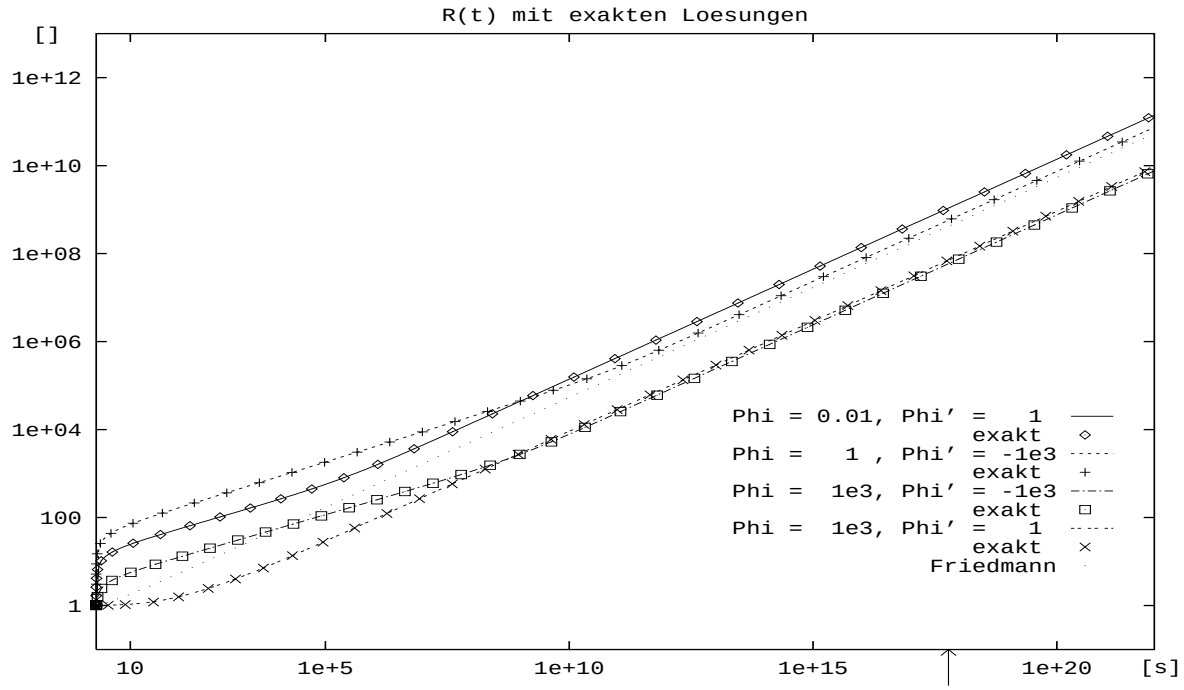
Wenn man neben k, B und φ auch $C = B'$ und $\hat{\varphi} = \varphi'$ als unabhängige Variablen betrachtet, so daß man

$$B' = C \quad , \quad \varphi' = \hat{\varphi}$$

als Entwicklungsgleichungen hinzunehmen muß, liegt mit den Gleichungen (10.1) ein System von fünf Differentialgleichungen erster Ordnung vor. Die Anfangswerte für k und B liegen dabei wegen $B(t_0) = k(t_0) = 0$ fest, während $B'(t_0)$ wie in Abschnitt 9.3 beschrieben ein freier Parameter ist, der über $k'(t_0)$ die anfängliche Anisotropie charakterisiert. Hier müssen nun außerdem die Werte für φ und φ' zum Zeitpunkt t_0 vorgegeben werden. Das gilt auch für den Fall $m = 0$, in dem die Gleichung für φ'' integriert werden konnte, da bei der Integration eine neue Integrationskonstante auftaucht. Aus physikalischen Gründen soll dabei $\varphi \geq 0$ angenommen werden. Als weiteren freien Parameter muß man hier auch dem Kopplungsparameter ω einen Wert zuweisen. Er ist ein Maß für die Kopplung zwischen der Materie und dem φ- Feld. Aus astronomischen Beobachtungen kann man dabei $\omega \geq 500$ schließen. Wie im Einsteinschen Fall sind natürlich außerdem noch die Paramter T_0 und m vorzugeben.
Daß man die Zeitentwicklung des Systems für verschiedene Werte von $B'(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$, ω und m (für $m \neq 0$) überhaupt sinnvoll diskutieren kann, ist dabei keineswegs von vorneherein klar. Wenn die Lösungen allein von einem oder zwei Parametern in komplizierter und empfindlicher Art abhängen würden, könnte man ohne zusätzliche Annahmen überhaupt keine charakteristischen Lösungen angeben. Die numerische Lösung des Systems wäre in diesem Fall gar nicht mehr sinnvoll. Man müßte dann schon physikalische Gründe für die Größe der Anfangswerte heranziehen, was natürlich gerade für $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ und ω sehr schwierig ist.
Zum Glück tritt dieser Fall hier in dieser Schärfe nicht ein. Obwohl nur eine sehr qualitative Diskussion möglich ist, haben die einzelnen Parameter doch einen sehr spezifischen und von anderen Parameterwerten unabhängigen Einfluß auf die Lösungen. Der Einfluß der Masse, der nur für große Zeiten wirksam wird, kann z.B. gut von den Brans-Dicke - spezifischen Parametern unterschieden werden, die für frühe Zeiten wichtig sind.

10.5 Konsistenztests

Wie bei der Lösung der Einstein-Gleichungen soll hier ein einfacher Konsistenztest für die numerische Simulation vorgestellt werden. Für $k'(t_0) = 0$ müssen nämlich die in Abschnitt 10.2 besprochenen exakten Lösungen für die Robertson-Walker-Metrik resultieren. Für die Strahlungslösung muß man dabei eine numerische Integration durchführen. Da dieses Verfahren aber unabhängig von der Lösung des Differentialgleichungssystems ist, bleibt der Wert des Konsistenztests natürlich erhalten.
Das Ergebnis ist für einige ausgewählte Parameterwerte in dem untenstehenden Diagramm abgebildet. Auch bei der Lösung der Brans-Dicke-Feldgleichungen treten also (zumindest für diese Parameterwerte) keine sichtbaren Fehler auf.
Das gilt auch für die Äquivalenz der Lösungen, wenn man ρ_0 durch $K\rho_0$, $k'(t_0)$ durch $\sqrt{K}k'(t_0)$ und $\varphi'(t_0)$ durch $\sqrt{K}\varphi'(t_0)$ ersetzt und zu den Zeiten t bzw. $K^{-\frac{1}{2}}t$ vergleicht (siehe Abschnitt 9.3).
Eine zum Einsteinschen Fall analoge Fehlerrechnung wurde hier nicht durchgeführt. Aufgrund der Vielzahl an freien Parametern wäre eine solche Untersuchung sehr aufwendig und unübersichtlich. Wegen der strukturellen Ähnlichkeit der Differentialgleichungen und der Lösung dieser Gleichungen (es treten keine Unstetigkeiten oder Singularitäten auf) kann man aber ähnlich kleine globale Fehler erwarten.



10.6 Der zeitliche Verlauf für $m = 0$

Gerade für frühe Zeiten ist man bei der Untersuchung der Lösungen der Brans-Dicke-Feldgleichungen auf die Ergebnisse der numerischen Simulation angewiesen, da die in Abschnitt 10.3 vorgestellten Näherungslösungen nur für große Zeiten und kleine Anisotropien nützlich sind. Aufgrund der dort festgestellten asymptotischen Eigenschaften kann man aber gewisse typische Werte für die freien Parameter auswählen. So werden als Anfangsbedingungen für $\varphi(t_0)$ im folgenden die Werte

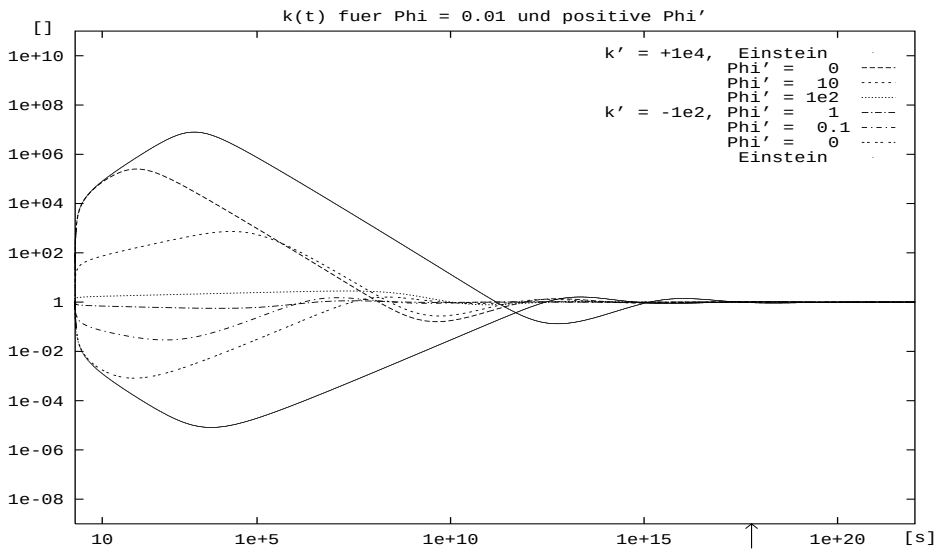
$$\varphi(t_0) = 0.01 \ , \ \varphi(t_0) = 1 \ , \ \varphi(t_0) = 10^3$$

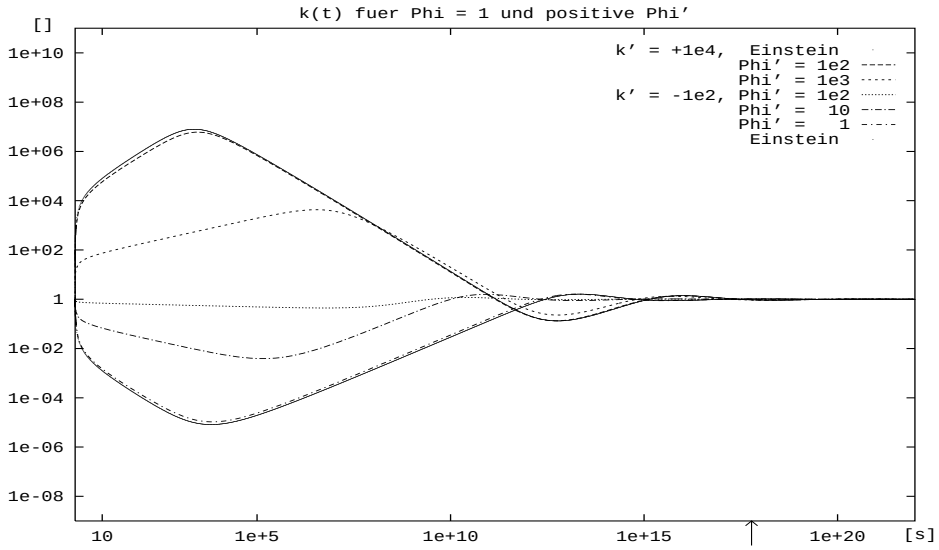
für verschiedene $\varphi'(t_0)$ untersucht. Wie sich herausstellt, ist der Einfluß des Vorzeichens von $\varphi'(t_0)$ für alle untersuchten Größen und Parameterbereiche vernachlässigbar klein. Aus diesem Grund werden mit Ausnahme der ersten Diagramme nur die Lösungen für positive $\varphi'(t_0)$ dargestellt, um die Diskussion übersichtlich zu halten.
Die Abhängigkeit der Lösungen von der durch $k'(t_0)$ spezifizierten Anfangsanisotropie ergibt sich analog zum Einsteinschen Fall und wird hier nicht im einzelnen untersucht. Als typische Werte wurden

$$k'(t_0) = +10^4 \ , \quad k'(t_0) = -10^2$$

ausgewählt. Wie schon im vorigen Kapitel wird hier und im folgenden die Einheit s^{-1} weggelassen.
Wie sich zeigen wird, läßt sich der Effekt einer geänderten Kopplungskonstanten in der Verstärkung bzw. Abschwächung des Einflusses von $|\varphi'(t_0)|$ festmachen. Sofern nicht ausdrücklich ausgezeichnet, werden die Lösungen für $\omega = 500$ gewonnen (der kleinste mit den heutigen Beobachtungen verträgliche Wert).
Dieses scheinen starke Einschränkungen für die Erfassung der systematischen Einflüsse der freien Parameter zu sein. Wie bereits in Abschnitt 10.4 angedeutet läßt sich aber der Einfluß jedes Parameters relativ eindeutig festmachen. Daher können die gewonnenen Ergebnisse zwar nur an den hier untersuchten Parameterbereichen festgemacht werden, es ergeben sich aber keine grundsätzlichen Beschränkungen der Aussagen. Außerdem würde die Dokumentation einer systematischen Untersuchung aller Parametergrößen den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen.
Wie schon im vorigen Kapitel markiert der Pfeil an der Zeitachse den Zeitpunkt $6 \cdot 10^{17}\, s$. Die Größen φ und φ' werden in den Diagrammen durch „Phi“ und „Phi' “ bezeichnet. Außerdem wird bei der Angabe der Anfangsbedingungen der Zeitpunkt t_0 nicht mehr explizit vermerkt.

Zunächst soll untersucht werden, welcher Zeitverlauf sich für k ergibt. Dabei zeigen die Diagramme 1-3 den Einfluß von positiven $\varphi'(t_0)$ und die Diagramme 4-6 den von negativen. Wie man sieht, spielt das Vorzeichen von $\varphi'(t_0)$ tatsächlich eine vernachlässigbare Rolle. Das wichtigste Ergebnis besteht aber darin, daß sich k im Laufe der Zeit wie im Einsteinschen System dem Wert 1 nähert, so daß die Metrik asymptotisch isotrop wird. Dabei ist die Anfangsanisotropie umso ausgeprägter, je kleiner $|\varphi'(t_0)|$ ist. Die Größenbereiche von $|\varphi'(t_0)|$, die sich in einer relevanten Veränderung von $k(t)$ bemerkbar machen und die daher jeweils für die Darstellung ausgewählt wurden, sind dabei von der Größe von $\varphi(t_0)$ und $k'(t_0)$ abhängig (in den Feldgleichungen taucht φ' ja auch nur in dem Term $\frac{\varphi'}{\varphi}$ auf).
Die Abhängigkeit vom Kopplungsparameter ω wird in den Diagrammen 7-9 illustriert. Dabei wurden relativ große Werte für $\varphi'(t_0)$ gewählt, um den Einfluß deutlicher zu machen. Der Kopplungsparameter geht nämlich nur über $\frac{\omega}{2}(\frac{\varphi'}{\varphi})^2$ in die Feldgleichungen ein. Wie zu erwarten war, hat ein geänderter Wert von ω den gleichen Effekt wie ein anderes $\varphi'(t_0)$.





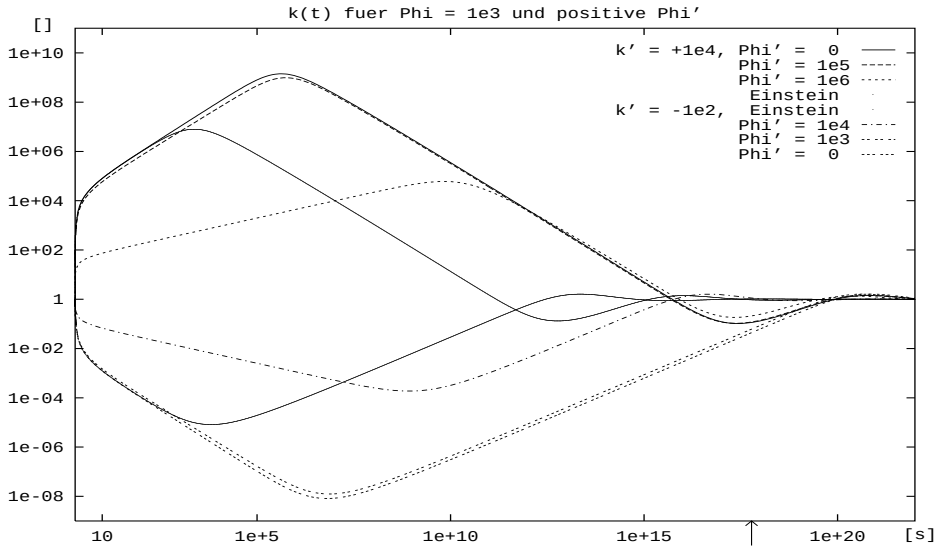
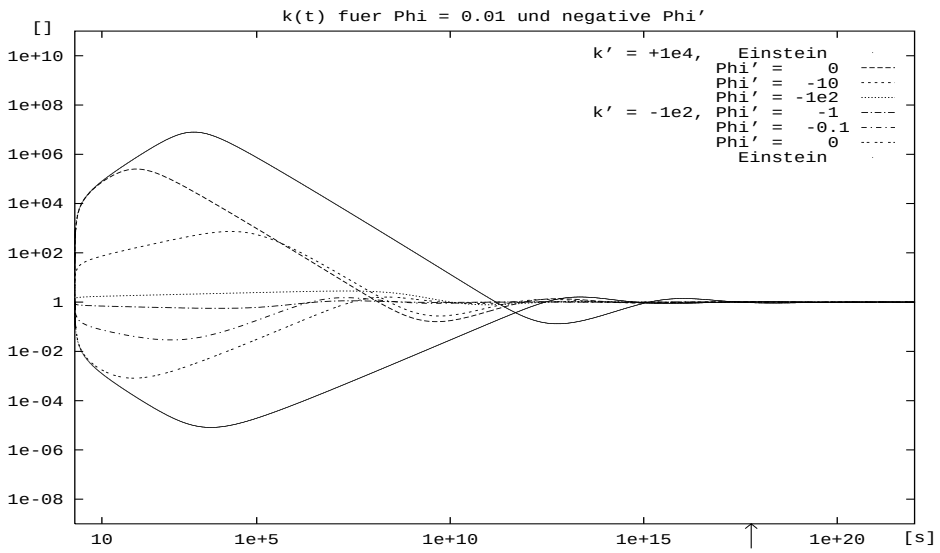
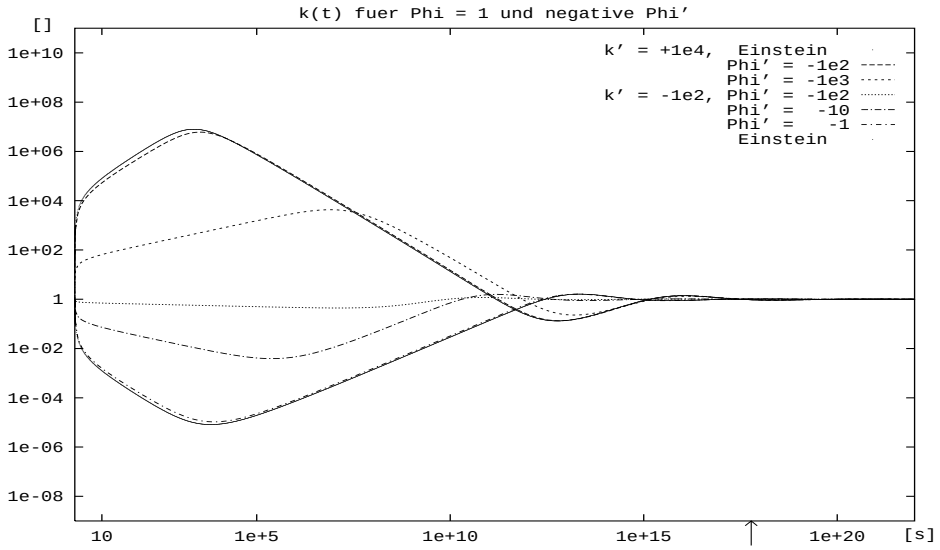


Diagramme 1-3





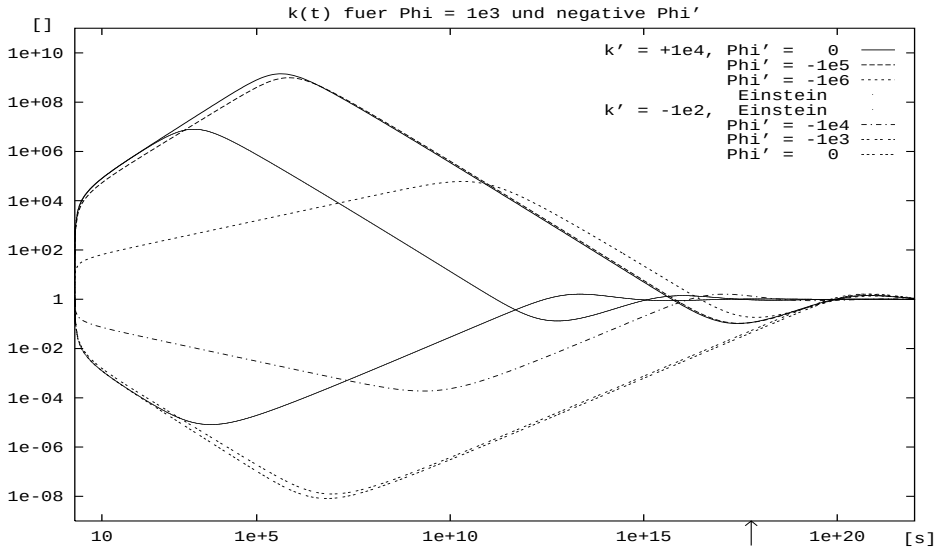
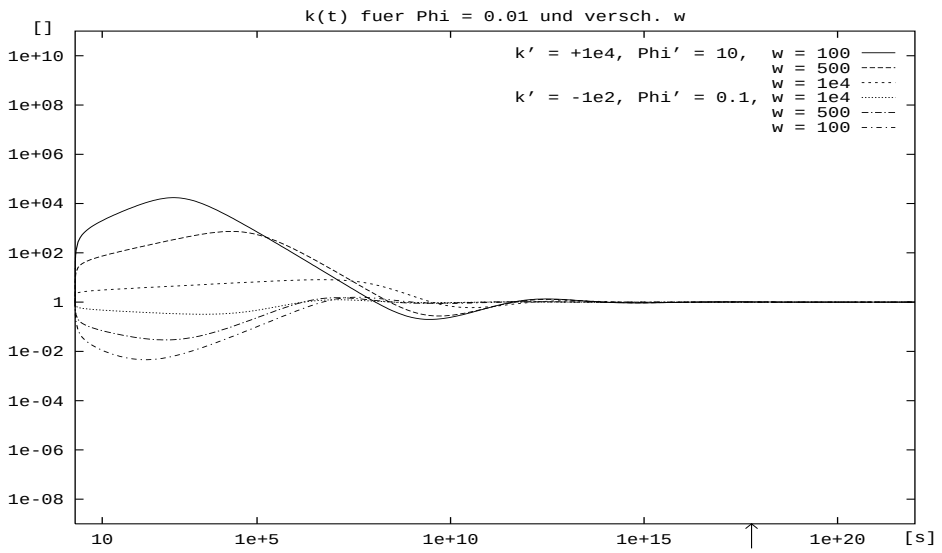
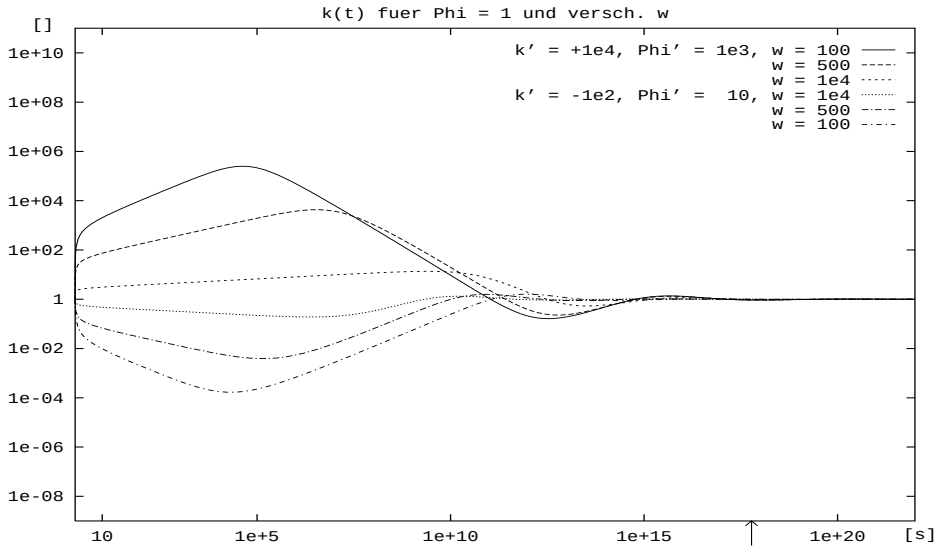


Diagramme 4-6





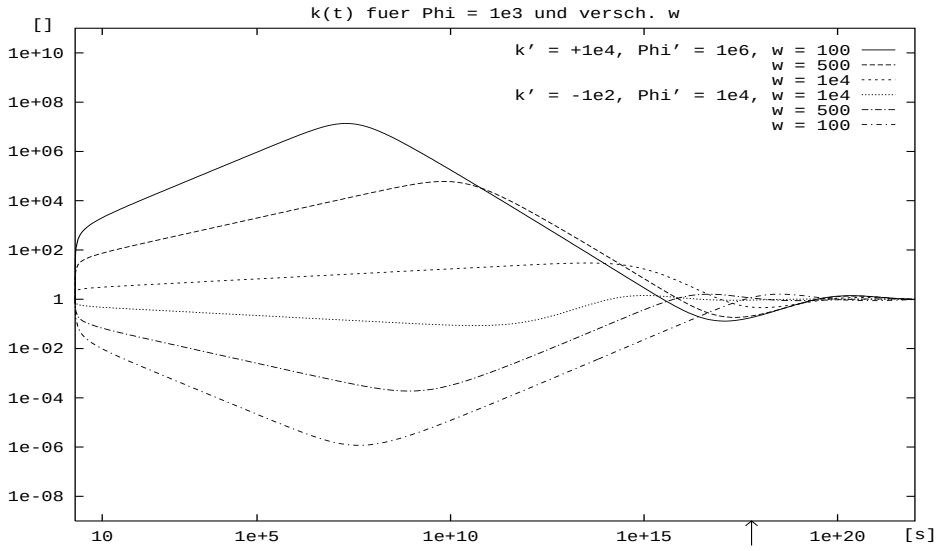


Diagramme 7-9

Die Übereinstimmung mit der Näherungslösung (9.4) soll hier nur an zwei typischen Fällen demonstriert werden:

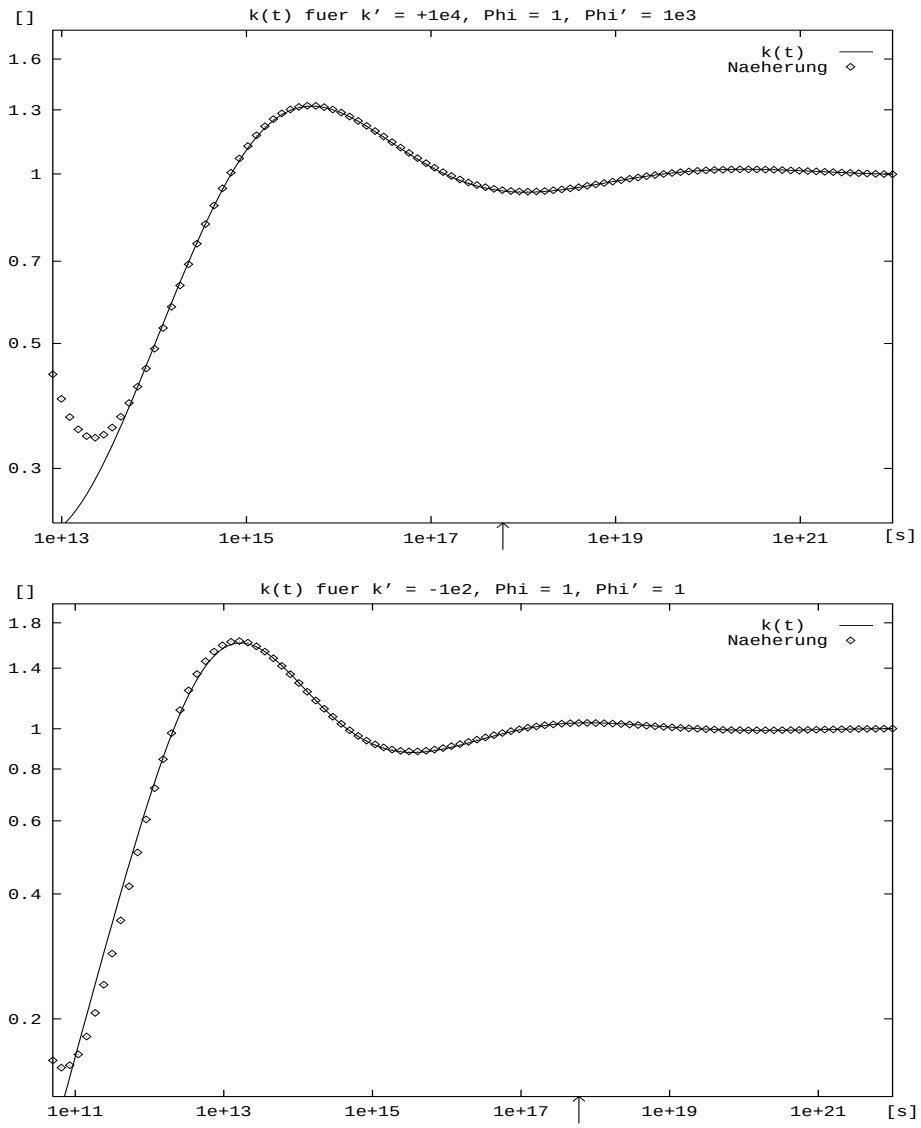
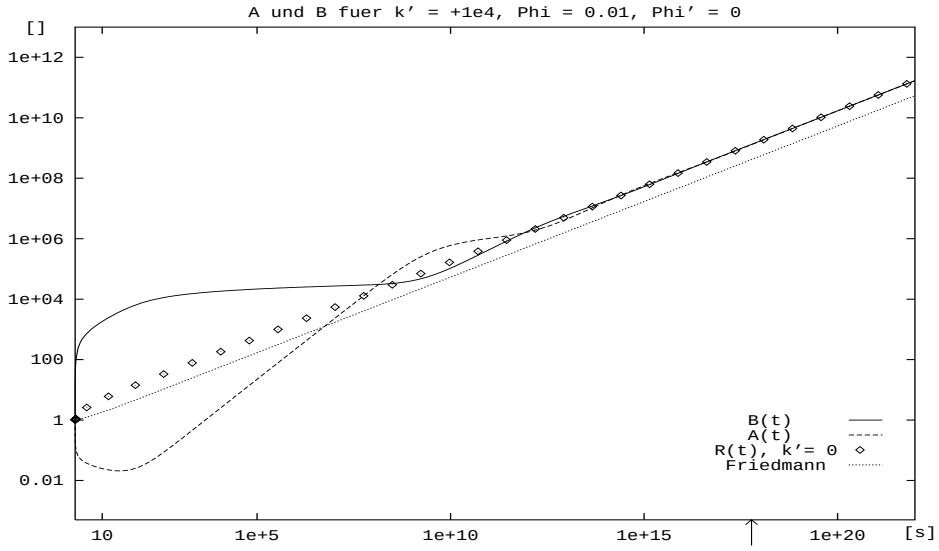


Diagramme 10,11

Die zeitlichen Verläufe der Metrikfunktionen A und B zeigen für frühe Zeiten einige interessante Eigenschaften, die beim Einsteinschen System nicht auftreten und auch nicht durch die Überlegungen in Abschnitt 10.3 eingefangen werden. Bei der Darstellung wurden zusätzlich die Zeitverläufe der Friedmann-Lösung ($\sim \sqrt{t - t_*}$) und der Brans-Dicke-Lösung für verschwindene Anfangsanisotropie eingezeichnet (letztere konnten unabhängig mit Hilfe der Ergebnisse von Abschnitt 10.2 gewonnen werden). Die Diagramme 12-15 zeigen zunächst den Verlauf für $\varphi(t_0) = 0.01$ und jeweils zwei verschiedene Werte von $\varphi'(t_0)$.



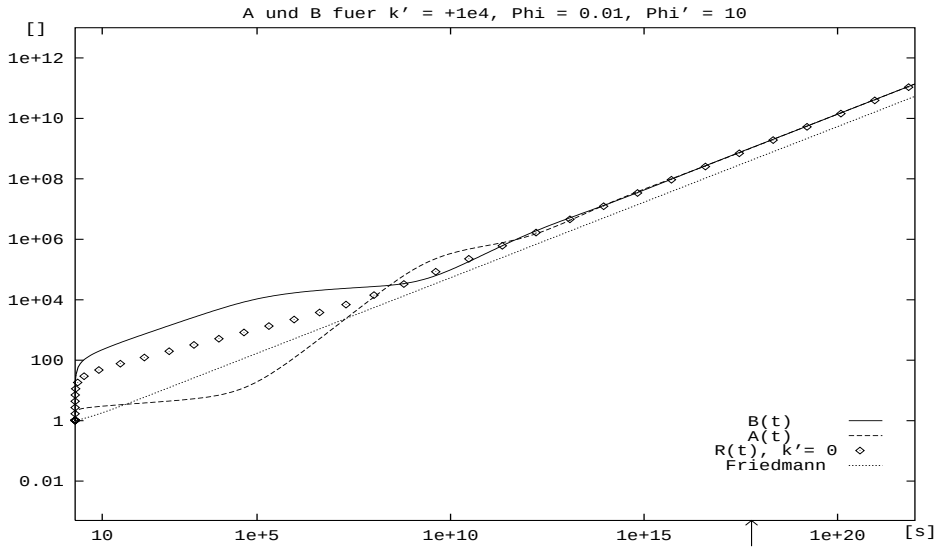
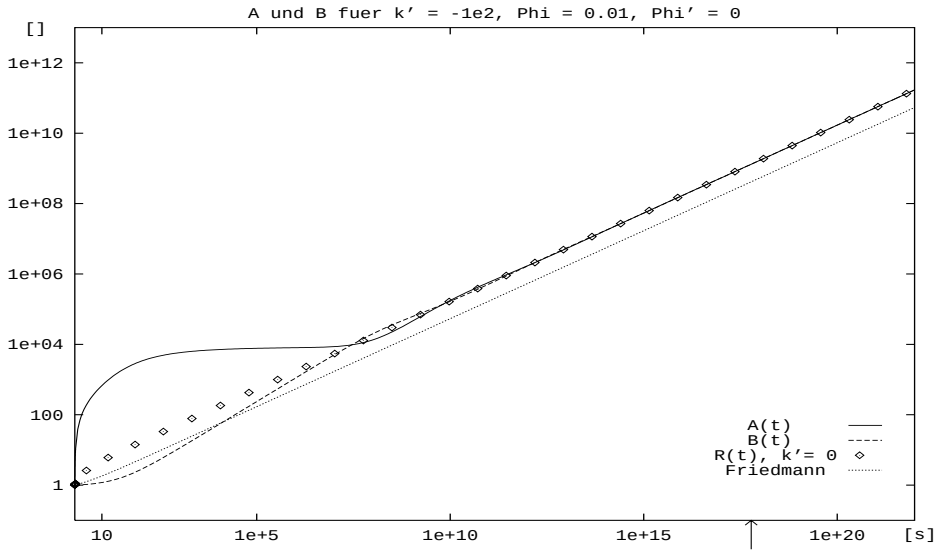


Diagramme 12,13



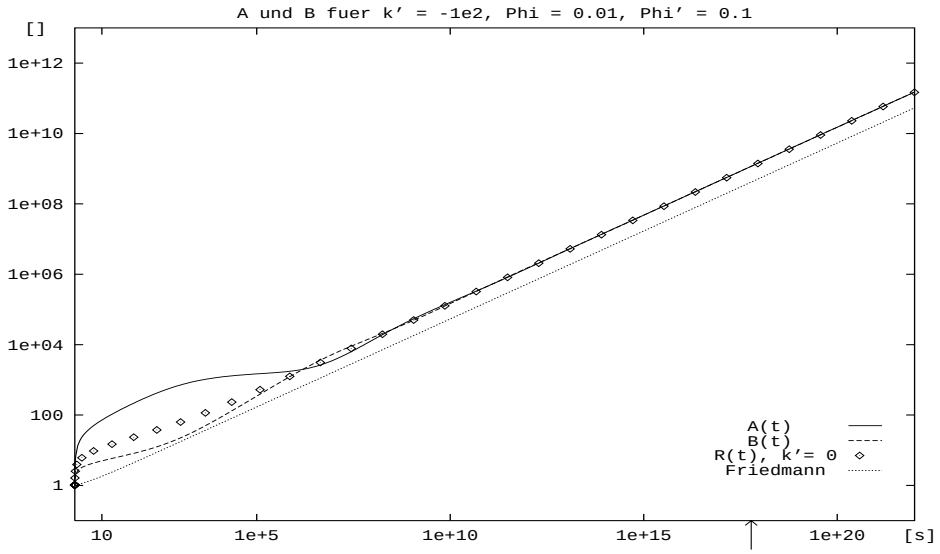
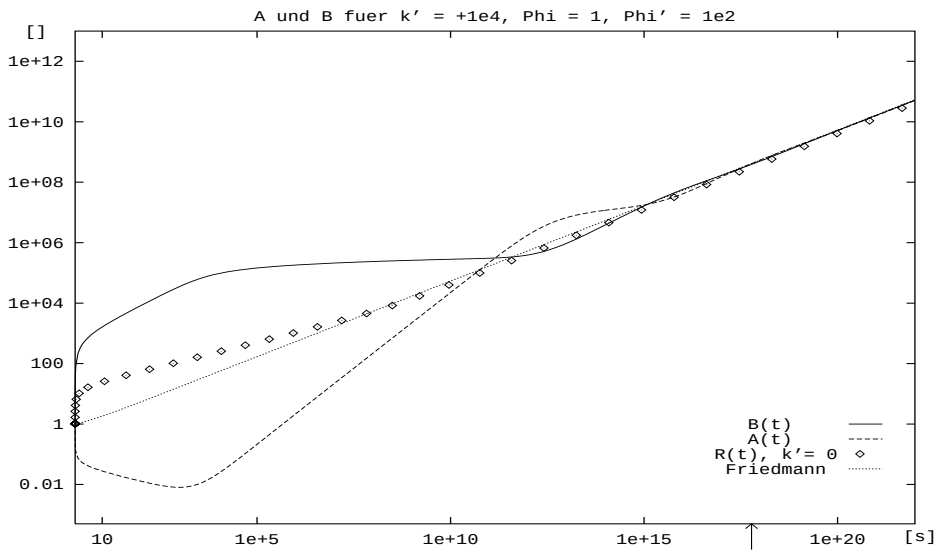
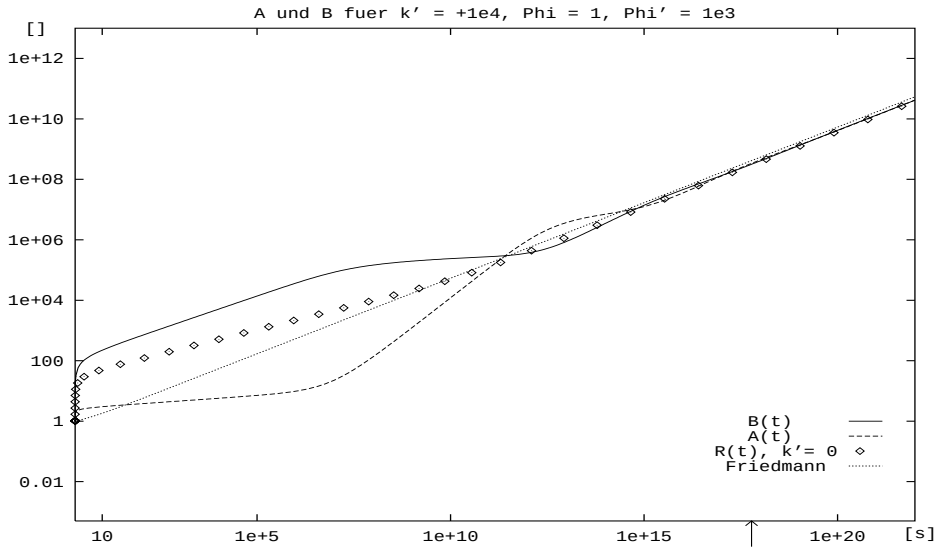


Diagramme 14,15

Abgesehen von dem starken anfänglichen Anstieg von $R(t)$ ist dabei vor allem der Verlauf von $A(t)$ und $B(t)$ für $k'(t_0) = +10^4$ bzw. $k'(t_0) = -10^2$ und $\varphi'(t_0) \neq 0$ auffällig. Im Gegensatz zum Einsteinschen System steigen sie nämlich zunächst stark an, um dann eine gewisse Zeitlang fast konstant zu bleiben ($k'(t_0) = +10^4$) bzw. nur schwach anzusteigen ($k'(t_0) = -10^2$). Dieses Phänomen zeigt sich auch für $\varphi(t_0) = 1$ in den Diagrammen 16-19 und für $\varphi(t_0) = 10^3$ in den Diagrammen 20-23. Für $\varphi(t_0) = 10^3$ und kleine $\varphi'(t_0)$ zeigt die durch R beschriebene Lösung mit verschwindender Anfangsanisotropie außerdem ein anderes Verhalten als bei den anderen Parameterbereichen. Hier bleibt R zunächst konstant und expandiert dann mit der gleichen Zeitentwicklung $\sim \sqrt{t - t_*}$ wie die Friedmann-Lösung.





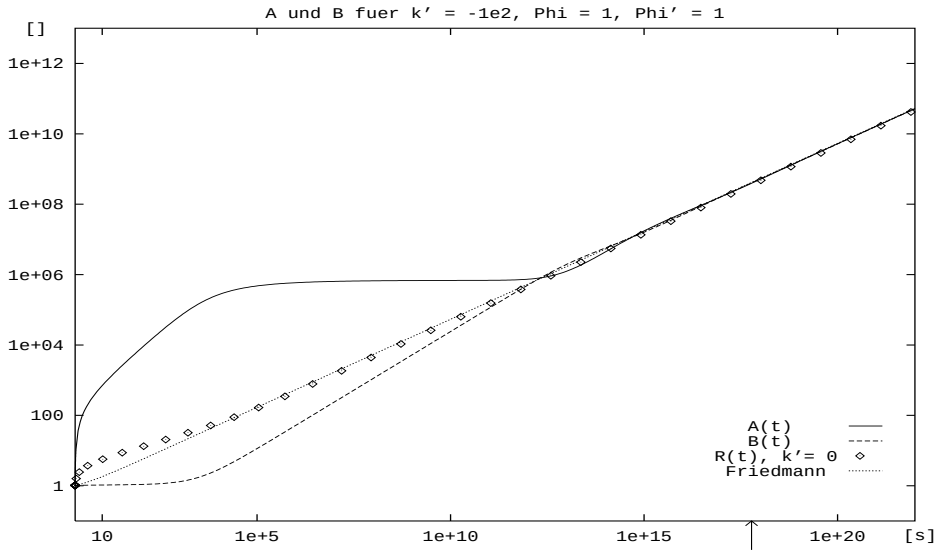
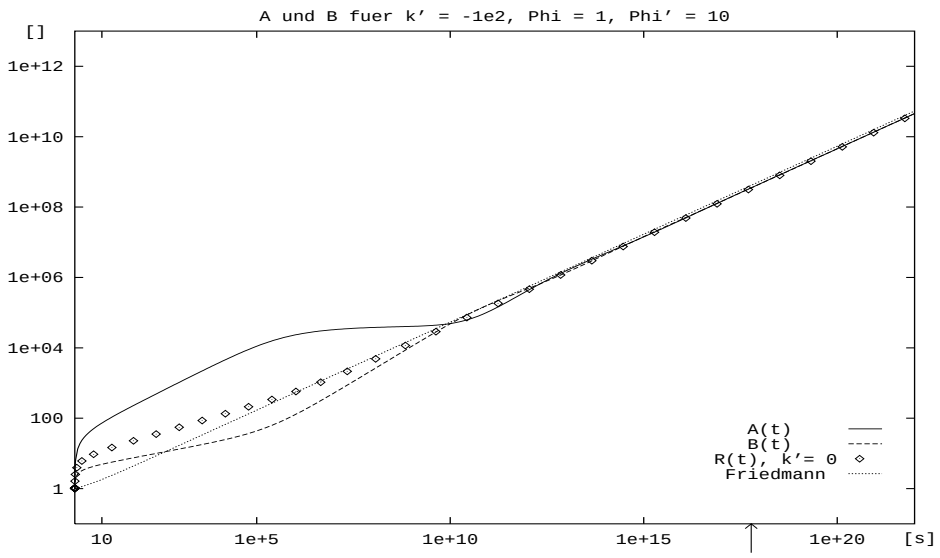
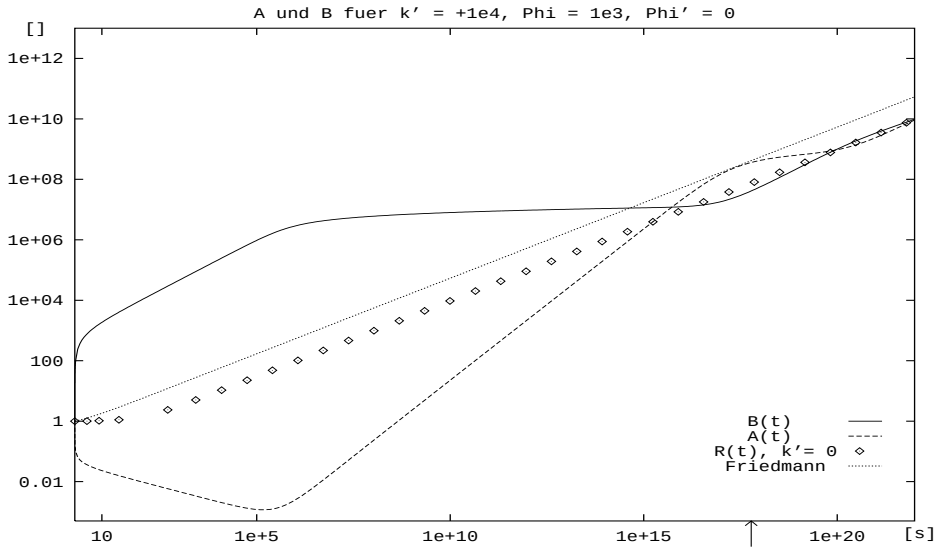


Diagramme 16-18





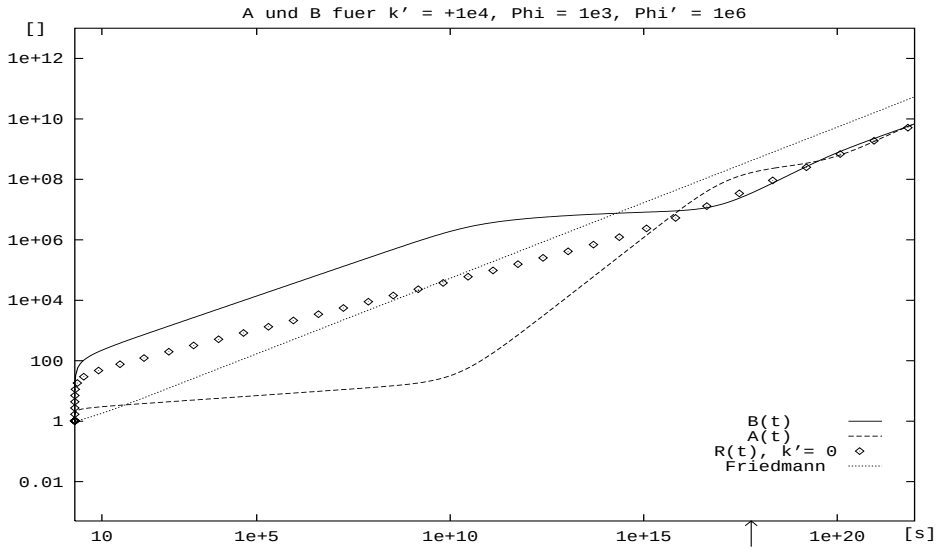
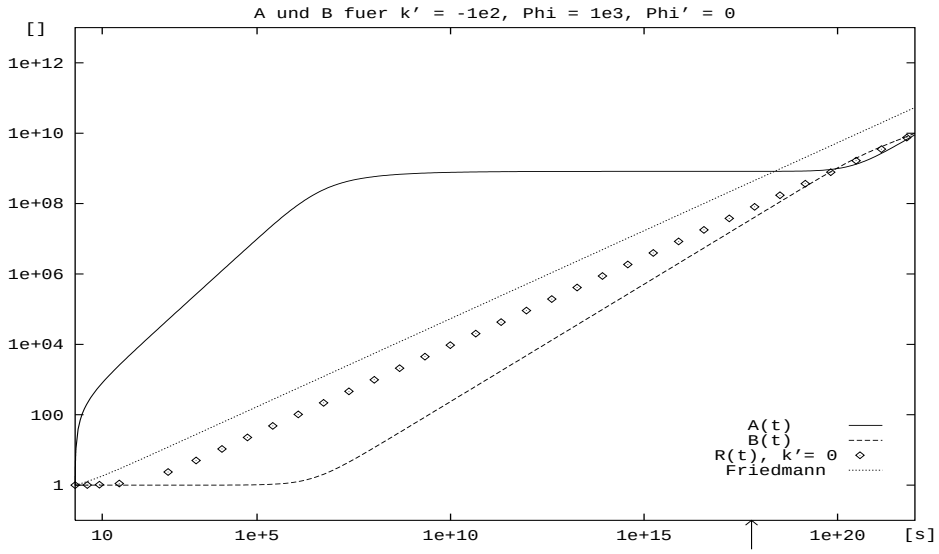


Diagramme 19-21



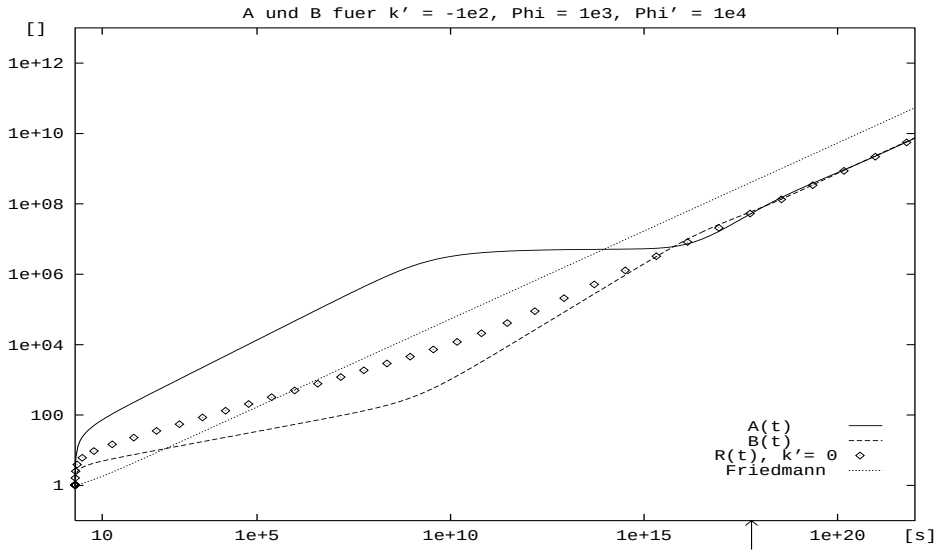
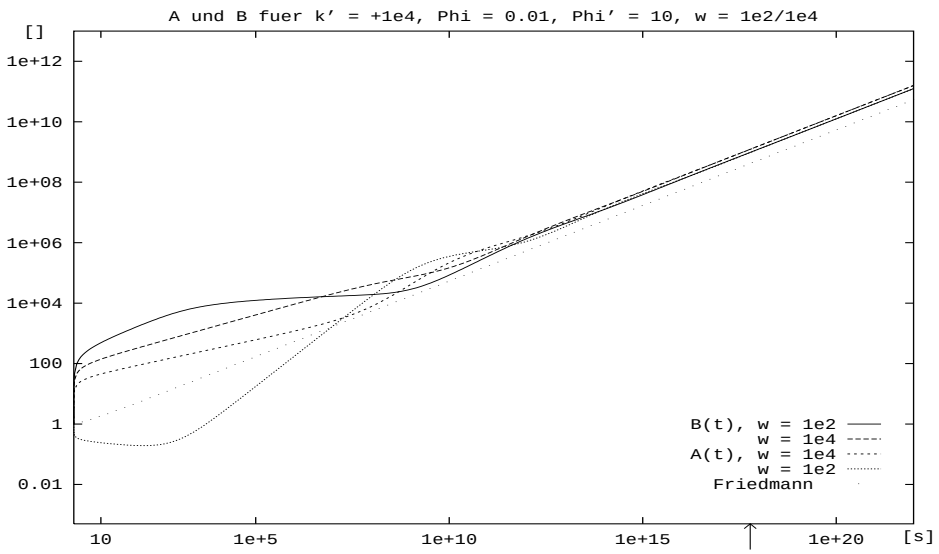
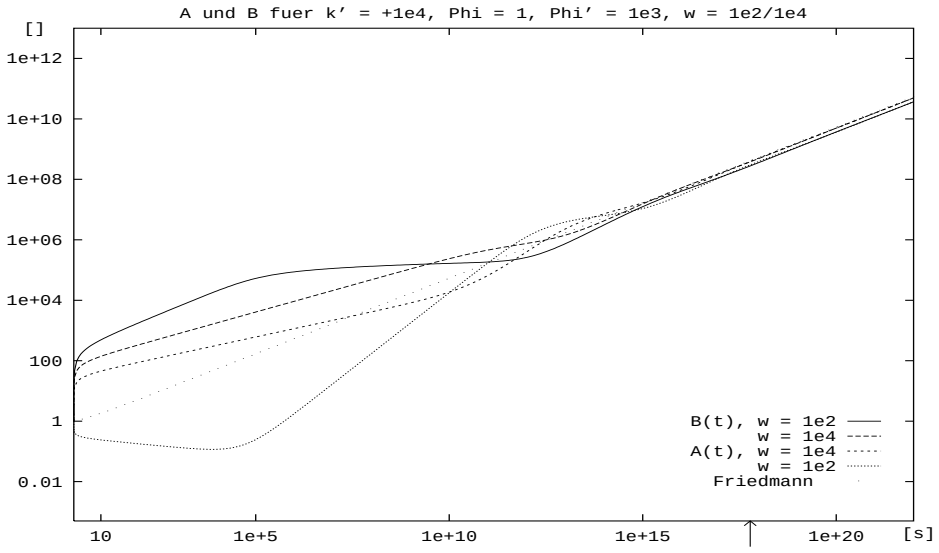


Diagramme 22,23

In den Diagrammen 24-29 wird der Einfluß der Kopplungskonstante ω illustriert. Auch hier gleicht er dem eines geänderten $\varphi'(t_0)$ - Wertes. Qualitativ neue Zeitverläufe ergeben sich nicht. Aus dem Verlauf der Hubble-Parameter lassen sich keine neuen Informationen gewinnen, er ist bereits grundsätzlich aus den Diagrammen 12-23 ablesbar und wird hier daher nicht dargestellt.





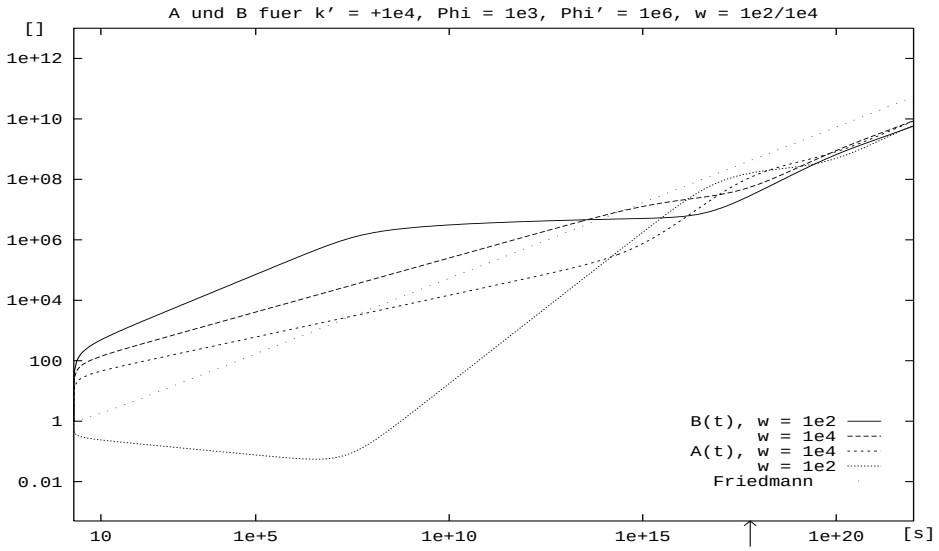
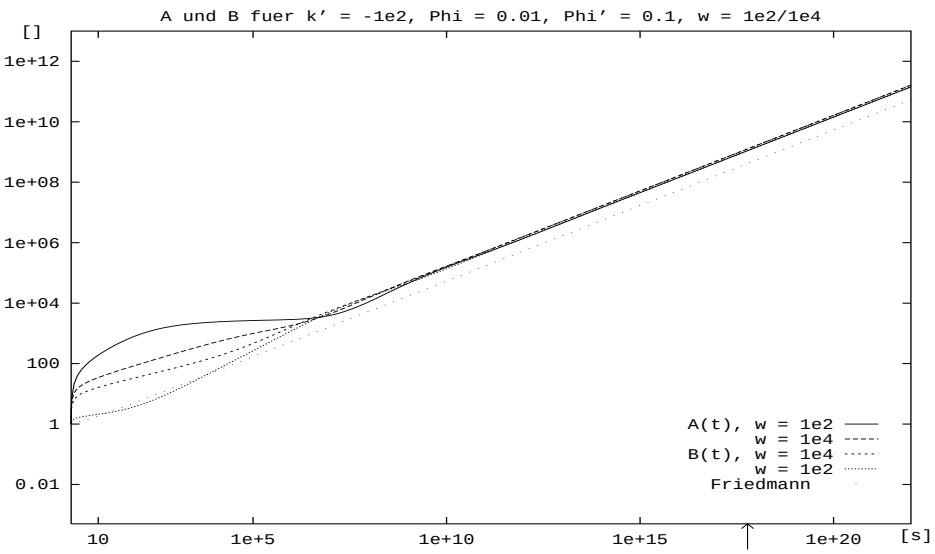
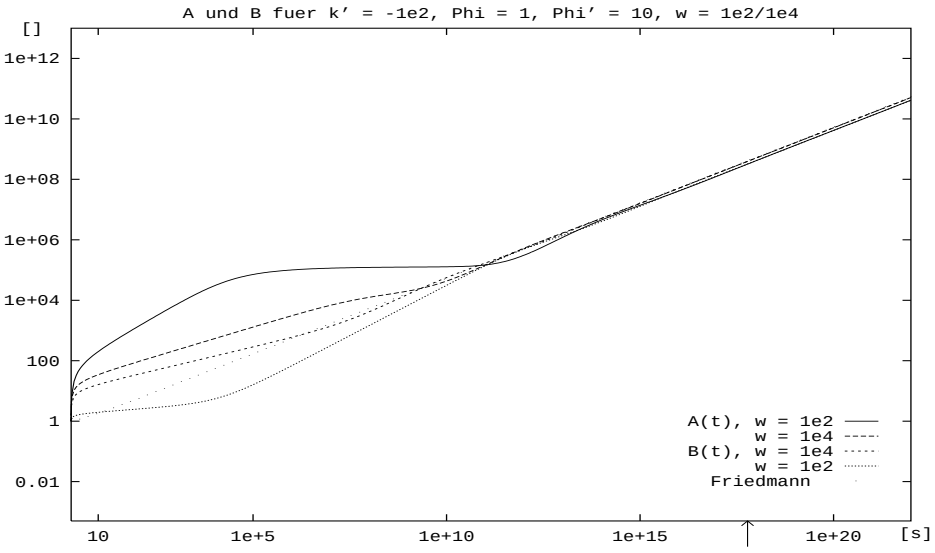


Diagramme 24-26





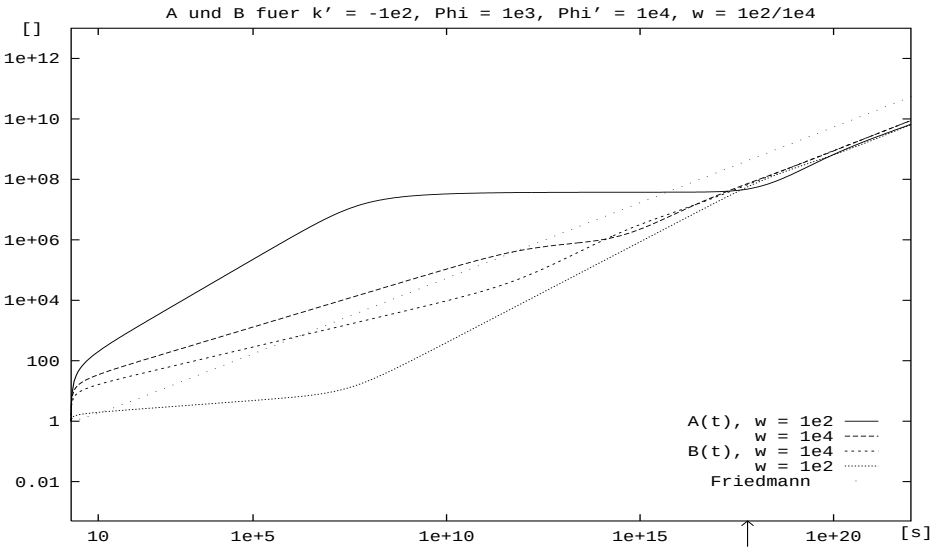


Diagramme 27-29

Die Zeitverläufe von $D(\ln T)$ und vom Anisotropieparameter sind hier ganz analog zum Einsteinschen System, da $k(t)$ auch hier durch die Näherungslösung (9.4) beschrieben wird (siehe Diagramme 10 und 11). Auf ihre Darstellung wurde daher verzichtet.

Ein interessantes Phänomen kann man dem Verlauf von $e^\alpha = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$ in den Diagrammen 30-35 entnehmen. Ein großer Wert von $\varphi'(t_0)$ führt nämlich zunächst zu einer stärkeren Expansion, dann kehrt sich der Effekt um und für große Zeiten ist e^α für kleine $\varphi'(t_0)$ größer. Die Unterschiede sind dabei aber nur minimal.

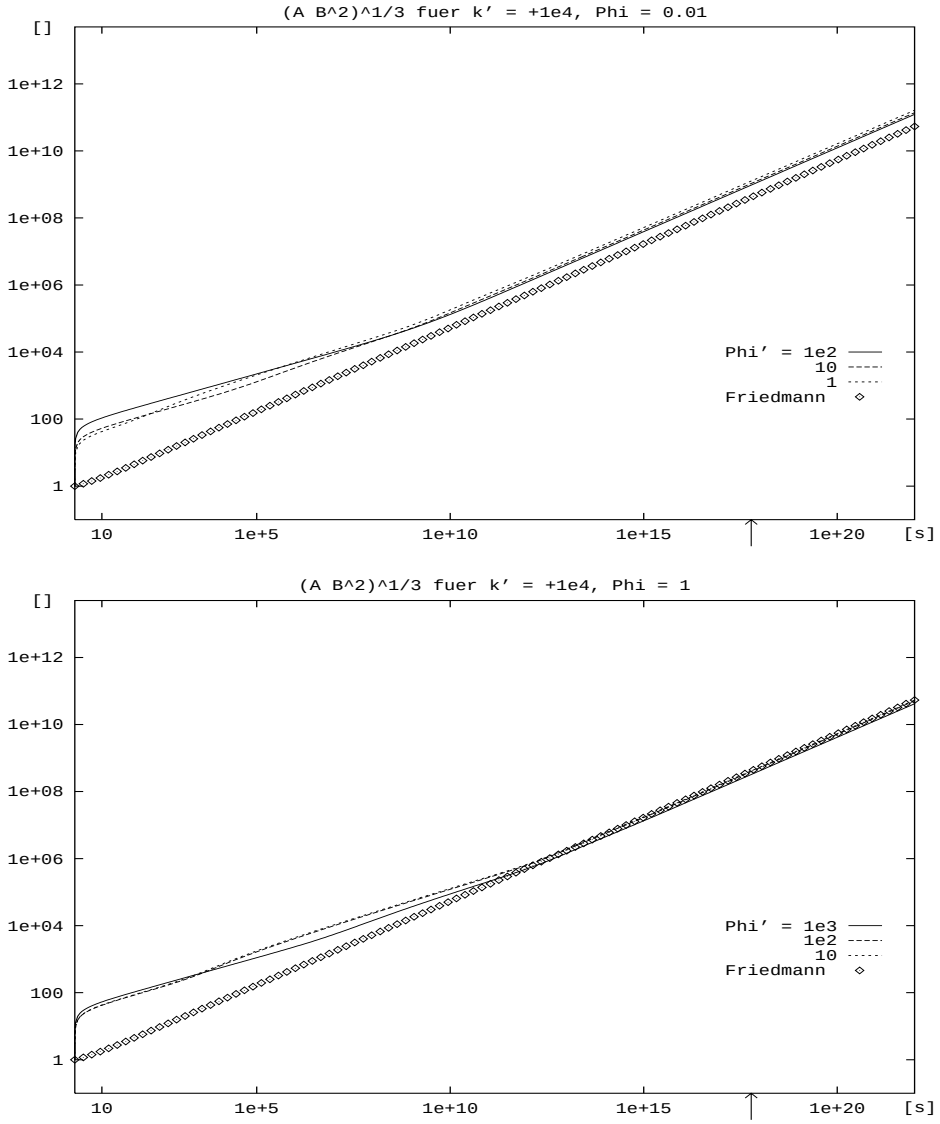
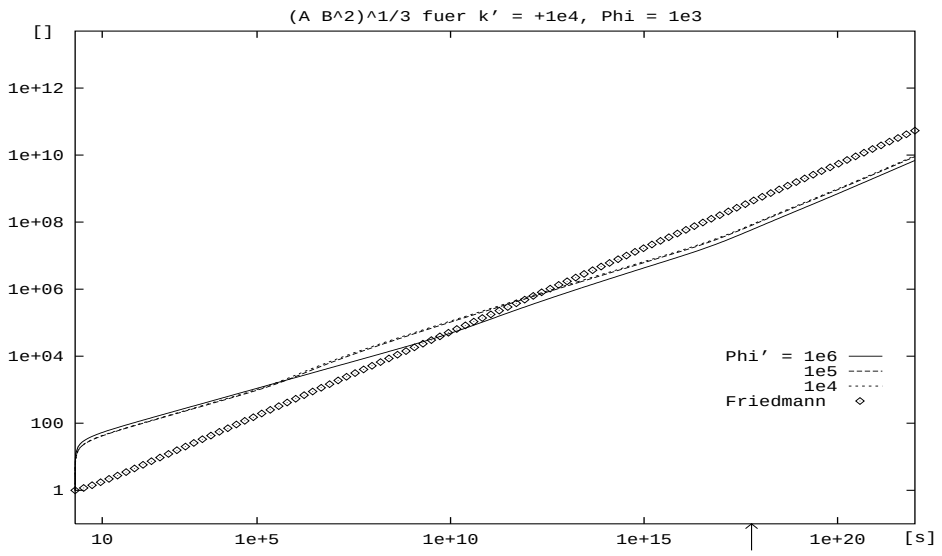
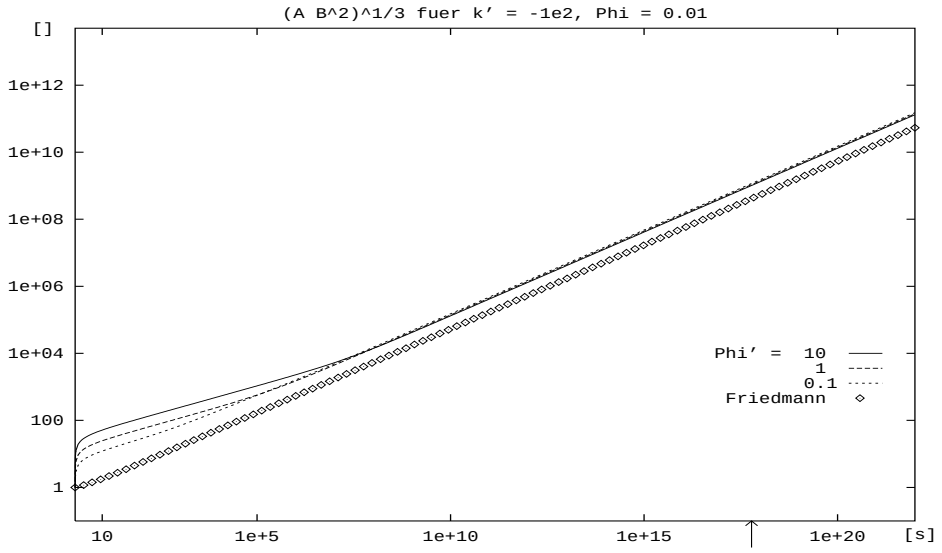


Diagramme 30,31





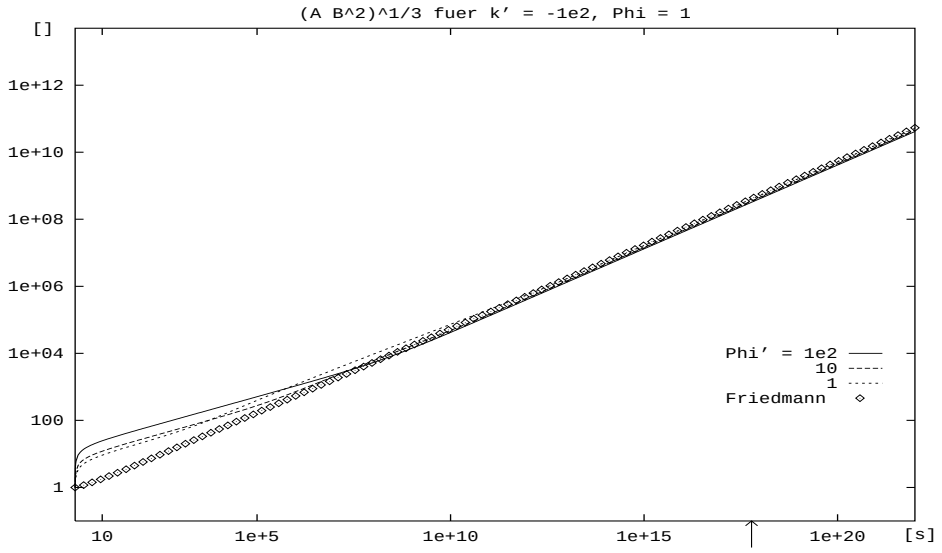


Diagramme 32-34

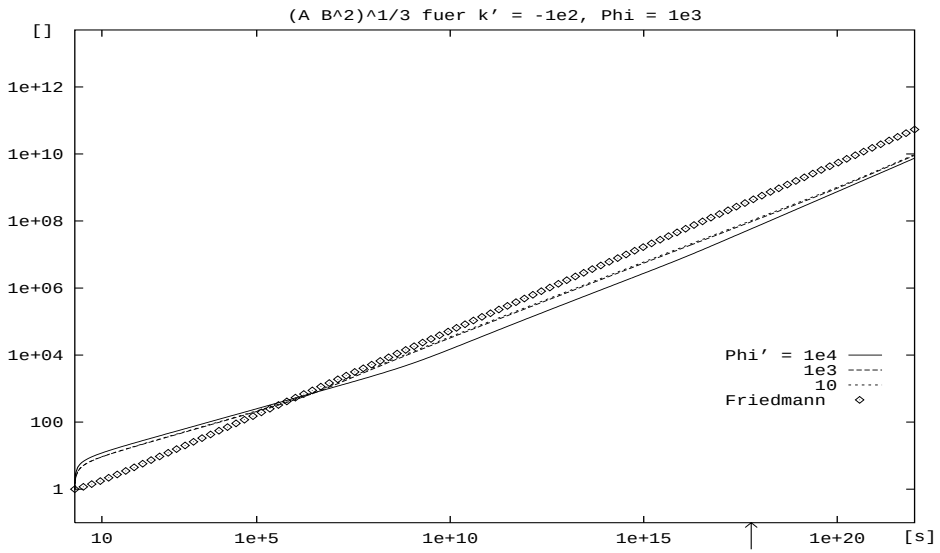


Diagramm 35

10.7 Der zeitliche Verlauf für $m \neq 0$

Eine nichtverschwindende Masse macht sich für $m \gg T_C$ bemerkbar. Der Zeitverlauf für frühe Zeiten ist daher mit dem für $m = 0$ identisch und wird nicht noch einmal dargestellt.
Nach den Untersuchungen in Abschnitt 10.3 kann man erwarten, daß $k(t)$ einen konstanten Verlauf nimmt, wenn die Masse wirksam wird. Tatsächlich kann man dieses in den Diagrammen 36-38 beobachten.

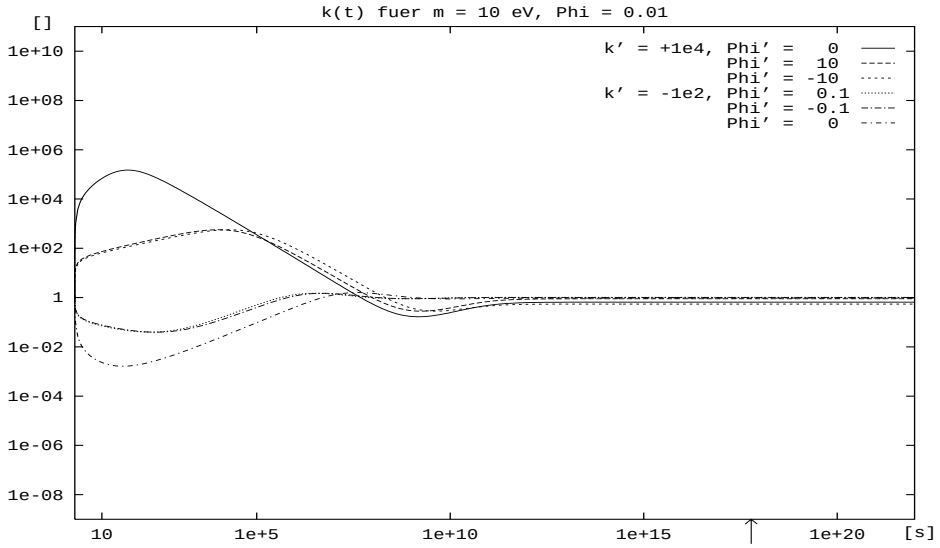
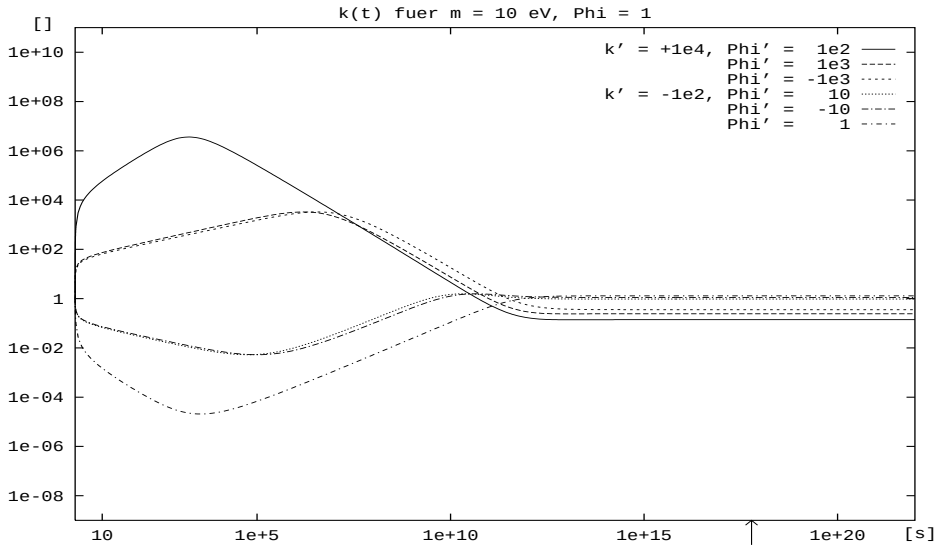


Diagramm 36



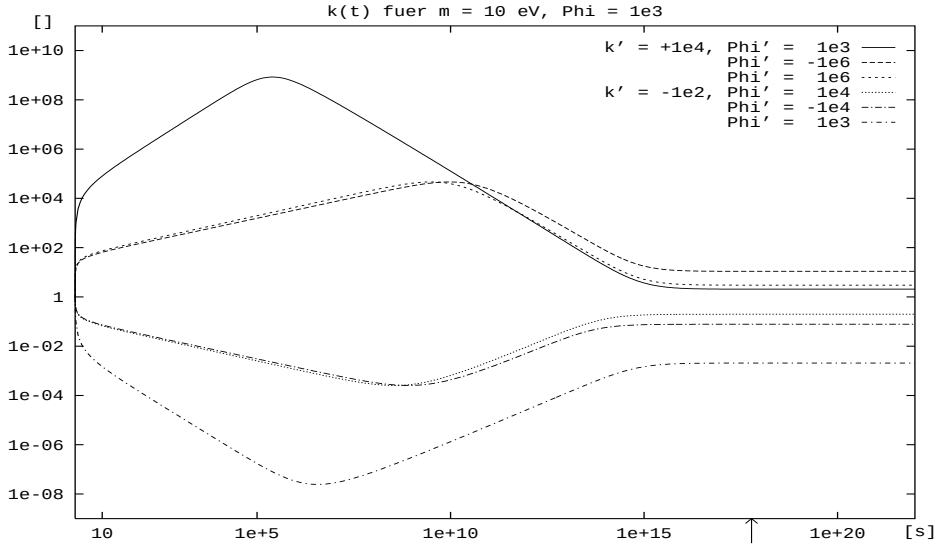
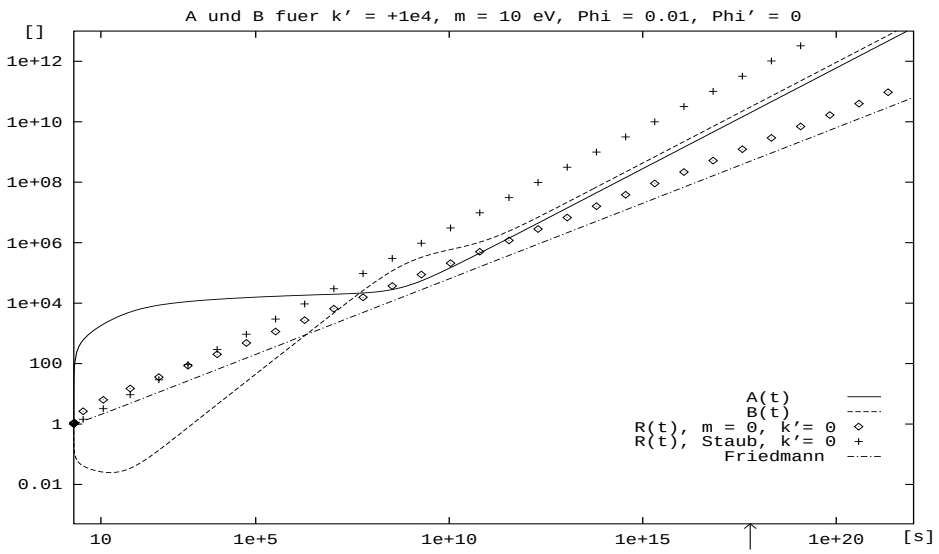
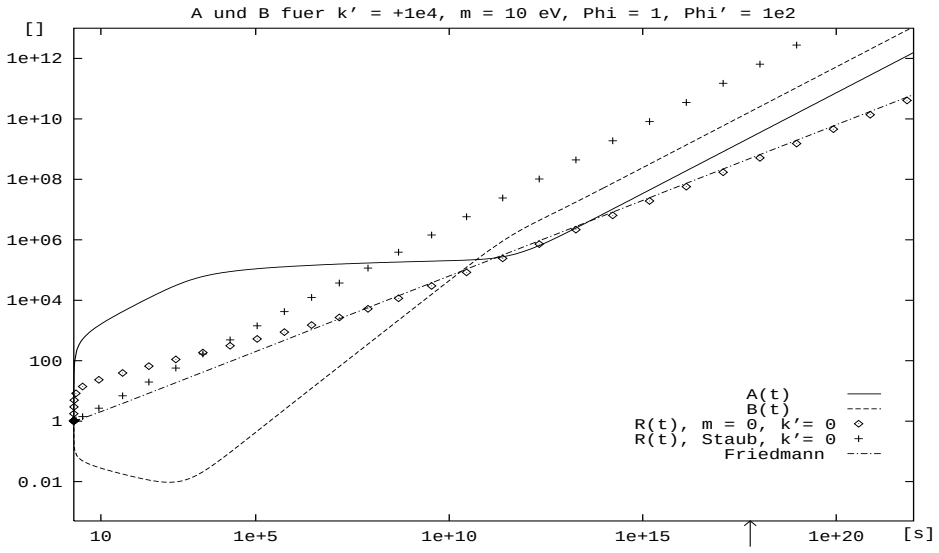


Diagramme 37,38

Die Zeitverläufe von A und B werden in den Diagrammen 39-44 für einige typische Parameterwerte illustriert. Sie zeigen vor allem die geänderte Zeitentwicklung $\sim (t - t_*)^{\frac{2}{3}}$ für $m \gg T_C$. Für frühe Zeiten ergeben sich aber keine Änderungen zum Fall $m = 0$.
Der genaue Verlauf des Abfalls der Anisotropie ist anschließend in den Diagrammen 45-50 dargestellt. Die Größe der Masse legt dabei erwartungsgemäß lediglich den Zeitpunkt fest, an dem die Masse spürbar wird. Hier taucht wieder das Problem auf, daß aufgrund von Rundungsfehlern nicht alle Lösungen bis $10^{22}\,s$ verfolgt werden können. Man kann außerdem sehen, daß alle Lösungen das gleiche Abfallverhalten haben, wobei die Übereinstimmung mit dem Verlauf $\sim t^{-2}$ (siehe Abschnitt 10.3) für einige typische Parameterwerte in den Diagrammen 51 und 52 demonstriert wird.





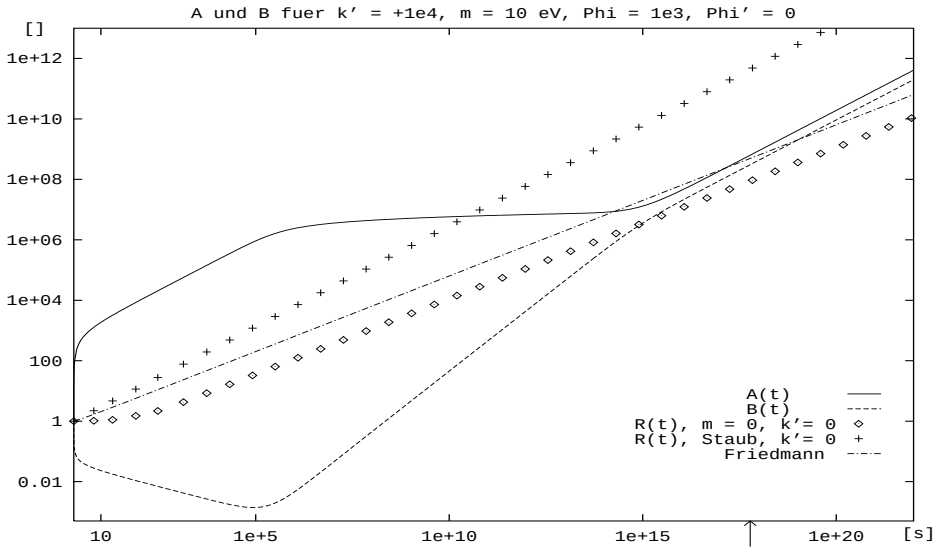
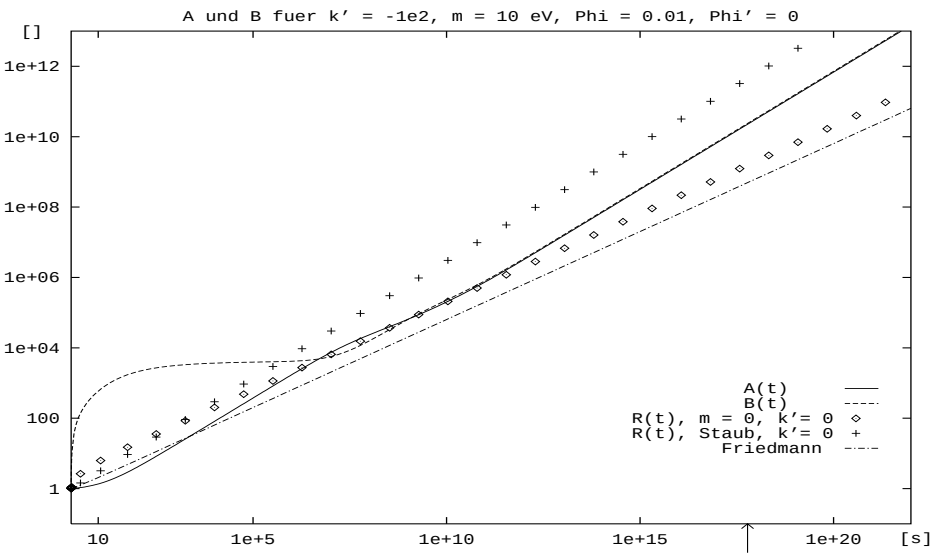
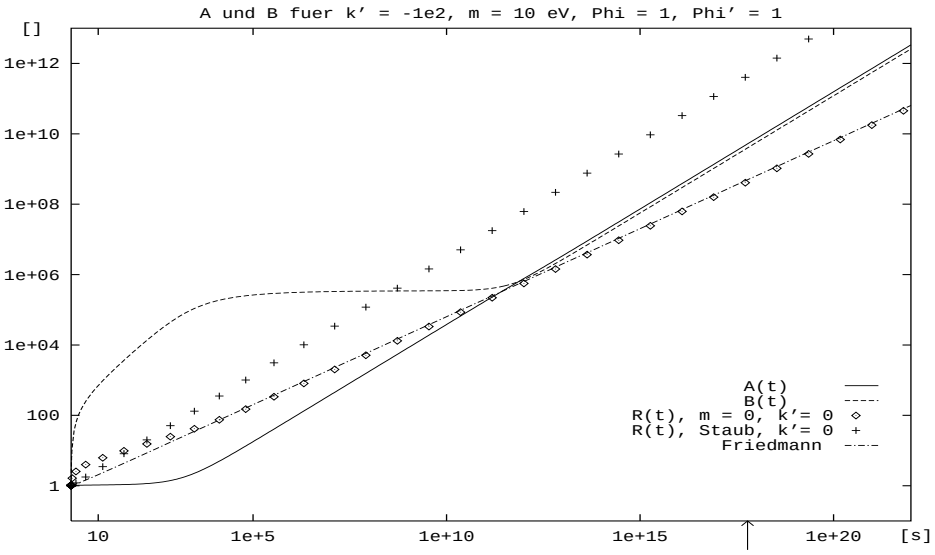


Diagramme 39-41





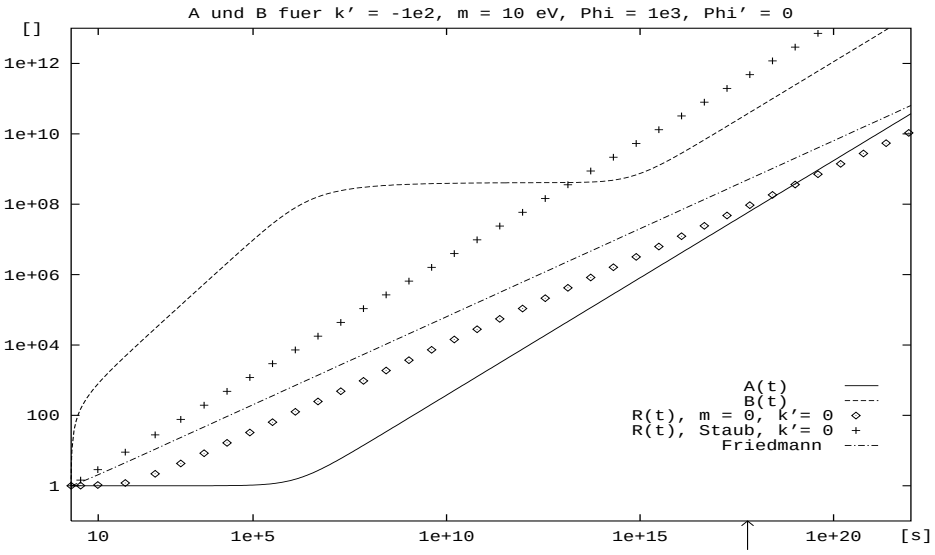
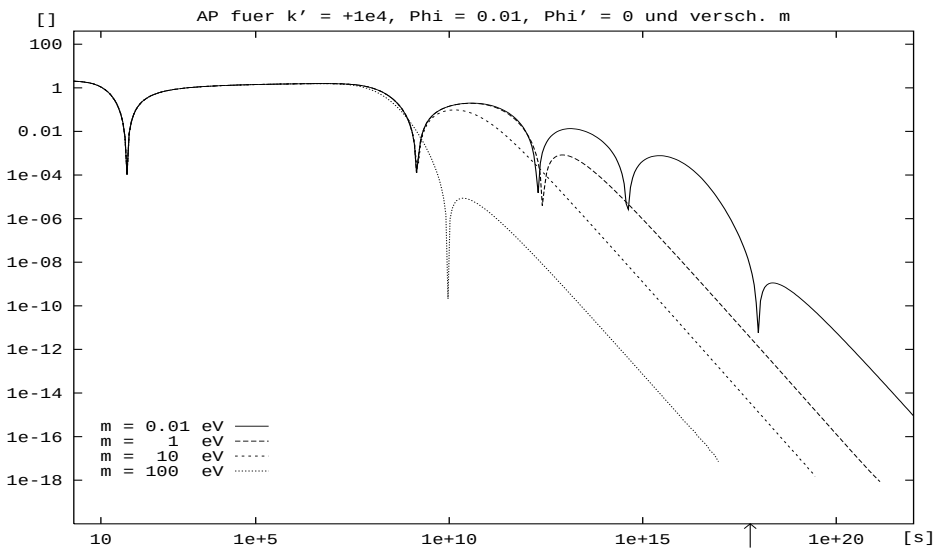
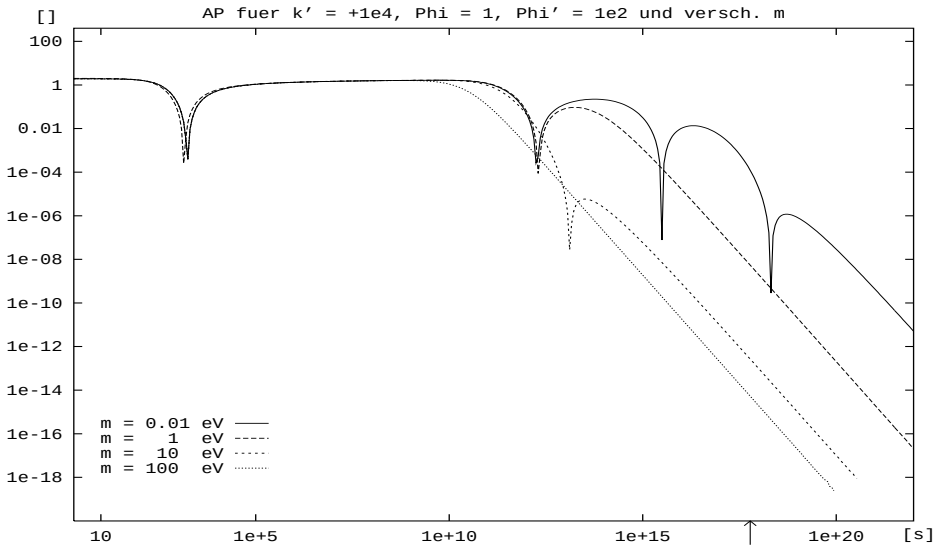


Diagramme 42-44





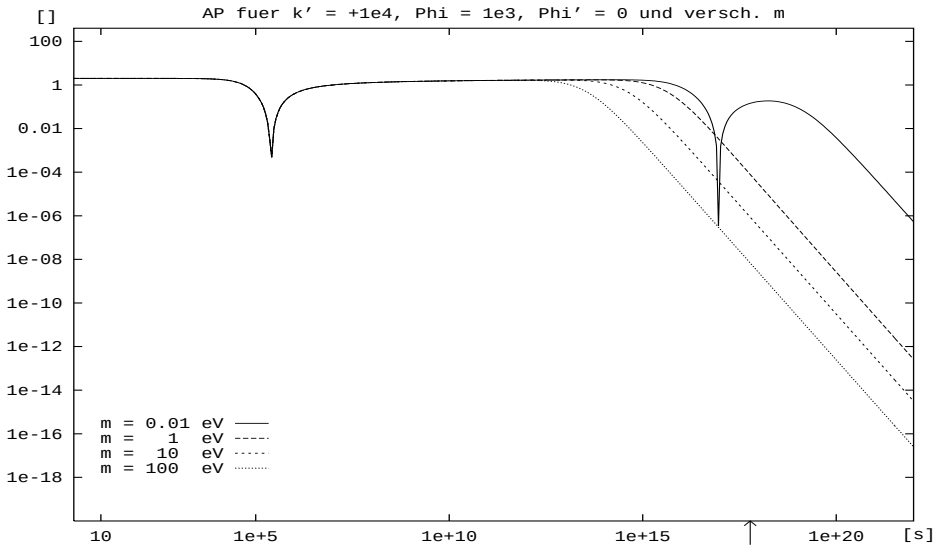
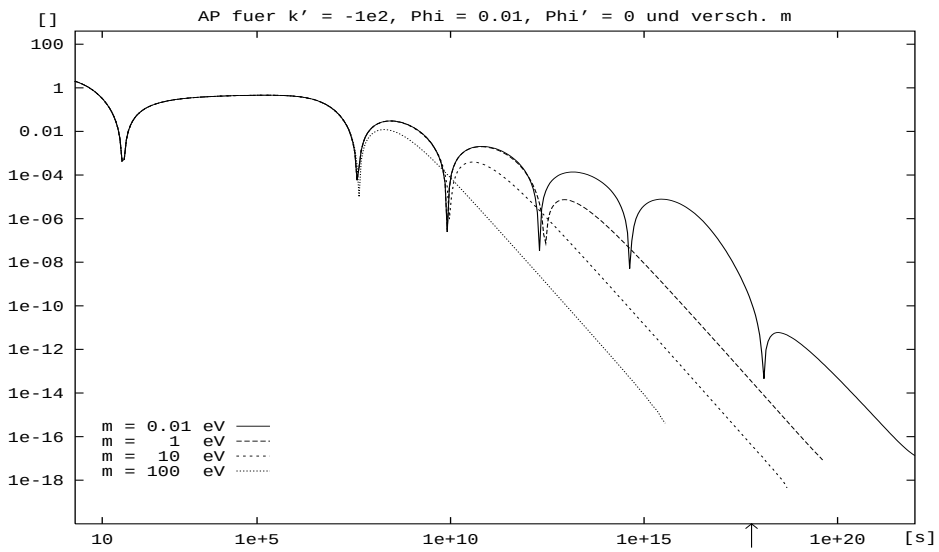
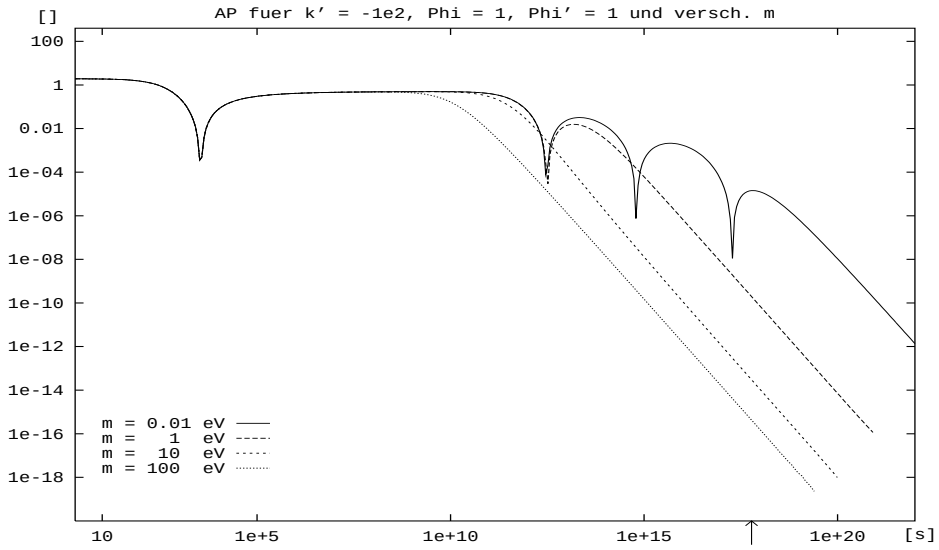


Diagramme 45-47





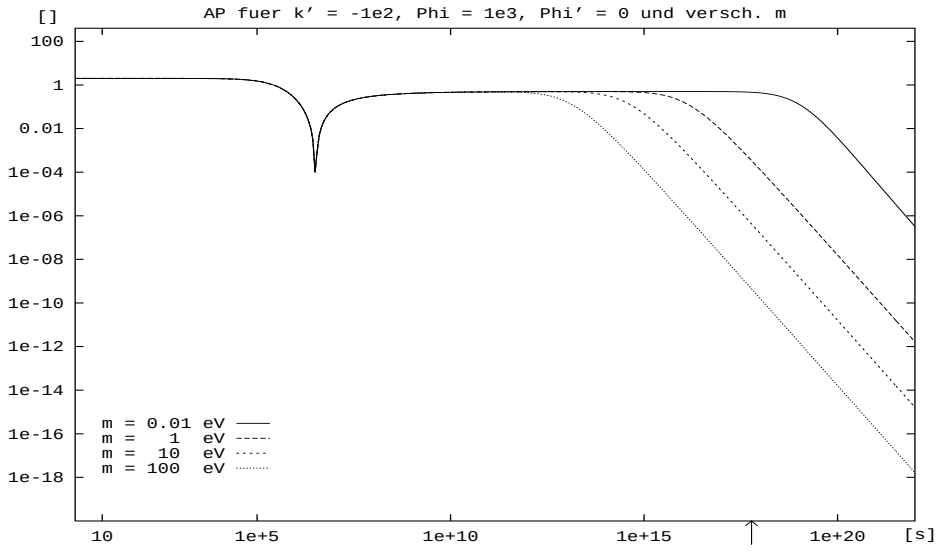
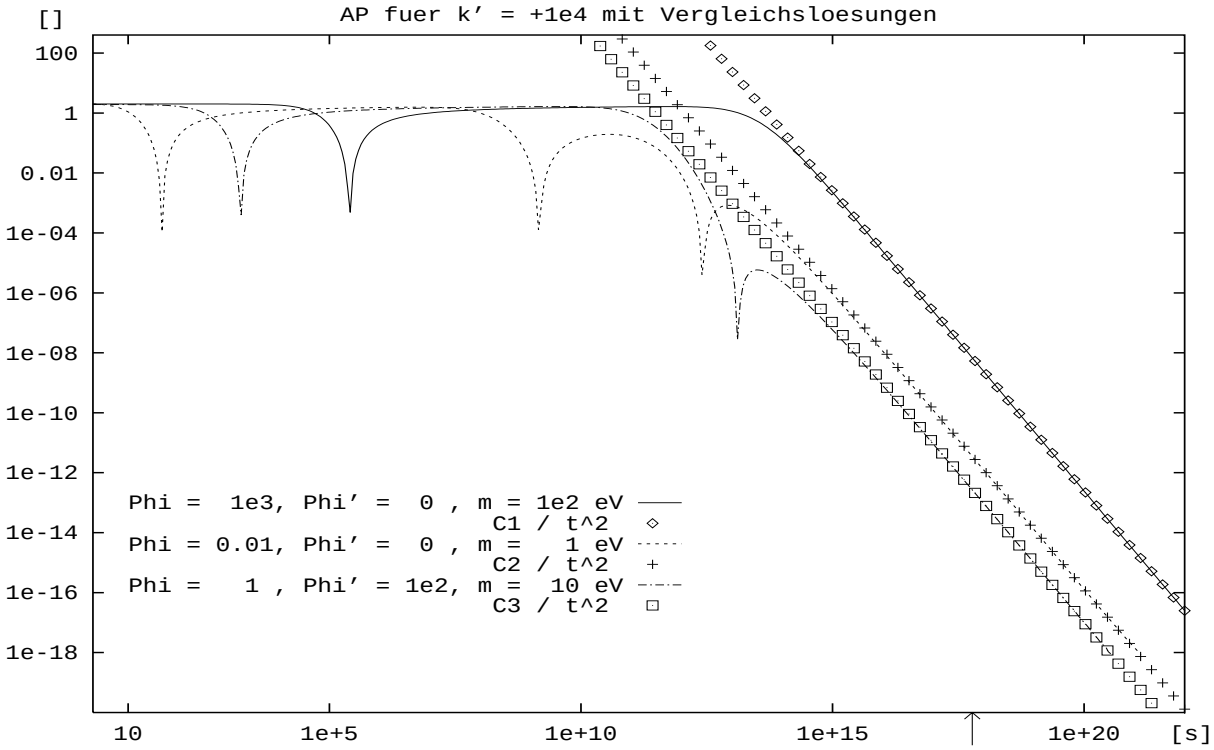


Diagramme 48-50



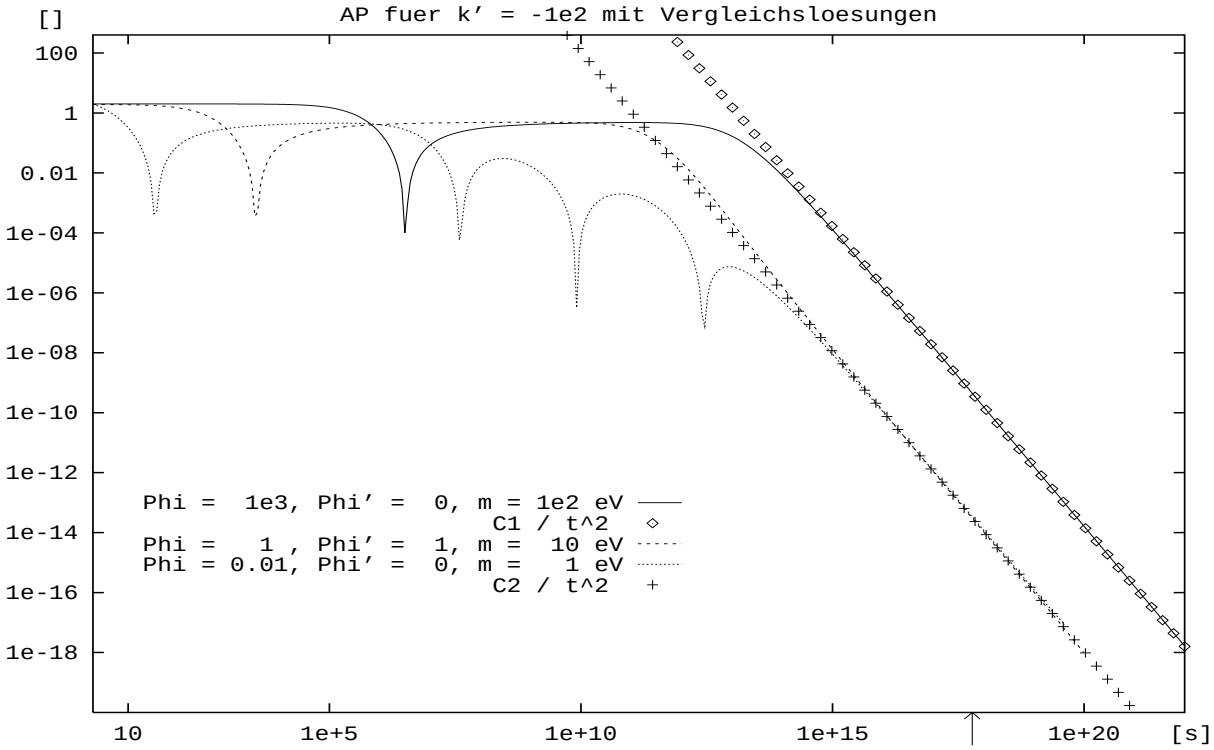


Diagramme 51,52

Zusammenfassung der Zeitverläufe

Nach den Ergebnissen der beiden letzten Kapitel kann man die Zeitentwicklung der in dieser Arbeit betrachteten Lösungen der Einsteinschen und der Brans-Dicke-Feldgleichungen durch die untenstehenden Grundaussagen charakterisieren. Wie am Anfang von Abschnitt 9.5 angesprochen wäre eine Diskussion der genauen Zahlenwerte der beschriebenen Größen wenig sinnvoll.

- Für große Zeiten geht $e^\alpha = (AB^2)^{\frac{1}{3}}$ in den Zeitverlauf der Friedmann-Lösung

$$\begin{aligned} e^\alpha &\sim \sqrt{t - t_*} \\ e^\alpha &\sim (t - t_*)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

  über. In der Einstein-Theorie ergibt sich für $m = 0$ außerdem die gleiche Proportionalitätskonstante $(\frac{4\kappa}{3}\rho_0)^{\frac{1}{4}}$ wie bei der Friedmann-Lösung.

  Für frühe Zeiten kommt es zunächst zu einem übermäßig starken Anstieg von e^α, der umso größer ist, je größer die Anfangsanisotropie gewählt wurde. Der Effekt ist allerdings nicht sehr groß.

- Die Größe $k = \frac{B}{A}$ strebt für große Zeiten einem konstanten Wert zu. Im Fall $m = 0$ ist dieser Wert gleich 1, so daß die Metrik asymptotisch eine euklidische Form annimmt. Abhängig von der Wahl der Anfangsanisotropie kann k aber für frühe Zeiten zunächst auf sehr große Werte ansteigen ($k'(t_0) > 0$) oder sehr kleine Werte abfallen ($k'(t_0) < 0$).

- Die durch k spezifizierte Temperaturanisotropie fällt nach dem anfänglichen Anstieg in den ersten Sekundenbruchteilen für $m = 0$ im Laufe der Zeit auf sehr kleine Werte ab. Dabei hängt der heutige Wert aber stark von der Größe der gewählten Anfangsanisotropie ab. Für $m \neq 0$ bleibt die Temperaturanisotropie für $m \gg T_C$ konstant und hat daher heute im Vergleich zum Fall $m = 0$ einen wesentlich größeren Wert.

- Auch der Anisotropieparameter zeigt einen abfallenden Verlauf. Für $m \neq 0$ ist der Abfall sogar stärker als für $m = 0$.

- Die in der Brans-Dicke-Theorie auftretenden Parameter $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ und ω beeinflussen in erster Linie die Größe der Anfangsanisotropie und führen nur für kleine Zeiten zu komplizierteren Zeitverläufen. Sie bestimmen aber die Größe der Proportionalitätskonstante von e^α.

Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend sollen die grundlegenden Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt werden.
In Teil I wurde zunächst die Arbeit von Ehlers, Geren und Sachs (EGS) in einer etwas adäquater scheinenden Darstellung vorgestellt. Dann wurde ihre mögliche Verallgemeinerung auf äußere Felder untersucht. Im Fall des elektromagnetischen Feldes können zwar viele Folgerungen aus der Liouville-Gleichung aufrecht erhalten werden (für den Fall, daß die Teilchen eine nichtverschwindene Ruhemasse haben, wurde dieses schon in [35] gezeigt), die Feldgleichungen ließen sich aber nicht wie in EGS vereinfachen. Das gilt auch für die Lösungen der Brans-Dicke-Theorie, die der Einsteinschen Theorie mit einem äußerem Skalarfeld entspricht. Für den Fall eines (in Abschnitt 6.2 spezifizierten) Skalarfeldes konnte aber in dieser Arbeit unter gewissen Voraussetzungen eine zu EGS analoge Argumentation durchgeführt werden. In einem Unterfall resultierte die Robertson-Walker-Metrik mit einer veränderten Zeitentwicklung. Wenn man eine direkte Kopplung des Skalarfeldes an die Materie erlaubt, ließen sich analoge Ergebnisse nur unter sehr starken Annahmen gewinnen.
Auch wenn eine grundlegende Verallgemeinerung der Arbeit von EGS (z.B. auf andere Eigenschaften der Verteilungsfunktion) sehr schwierig ist, konnte somit in dieser Arbeit gezeigt werden, in welchem Rahmen die bisher noch nicht durchgeführte Verallgemeinerung auf äußere Felder möglich ist.

Inhalt von Teil II war die Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der axialsymmetrischen Bianchi I - Metrik $ds^2 = -dt^2 + A(t)^2\, dx^2 + B(t)^2\, (dy^2 + dz^2)$ als Lösung der Einsteinschen und der Brans-Dicke-Feldgleichungen. Der Energie-Impuls-Tensor wurde im Rahmen der Kinetischen Theorie durch eine Integration über die Verteilungsfunktion gewonnen. Diese leitete sich aus der Forderung ab, daß sie die Liouville-Gleichung erfüllt und von den Raumzeitsymmetrien der Metrik invariant gelassen wird. Auch für die (richtungsabhängige) Temperatur der Teilchen ließ sich so ein Ausdruck gewinnen. Für die Feldgleichungen konnten nur Näherungslösungen für kleine Anisotropien angegeben werden.
Diese Ausführungen waren schon vor dieser Arbeit bekannt ([24], [33]). Eine ausführliche Diskussion der Zeitverläufe unter Einbeziehung des Falls $m \neq 0$ wurde aber bisher anscheinend noch nicht vorgenommen. Die Näherungslösungen für die Einsteinschen Feldgleichungen konnten außerdem unter gewissen Einschränkungen auf die Brans-Dicke-Feldgleichungen übertragen werden. Hauptinhalt dieser Arbeit war aber die (möglichst vollständige) Diskussion der Lösungen der Feldgleichungen mit Hilfe einer numerischen Simulation auf dem Computer. Diese Lösungen charakterisieren ganz allgemein die Zeitentwicklung eines Fermionen- oder Bosonengases und sind nicht auf das in [24] und [33] betrachtete Neutrinogas beschränkt.
Dabei wurden in dieser Arbeit die folgenden grundlegenden Eigenschaften gefunden: Der Zeitverlauf des „Gesamtskalenparameters“ $(AB^2)^{\frac{1}{3}}$ gleicht für große Zeiten unter gewissen Einschränkungen dem der Friedmann-Lösung. Die Anfangsanisotropie in Form der Temperaturanisotropie und des Anisotropieparameters klingt für ruhemasselose Teilchen schnell ab. Für $m \neq 0$ gilt dies nur für den Anisotropieparameter. Die Temperaturanisotropie bleibt in diesem Fall selbst für kleine Massen sehr groß. Der heutige Wert dieser Größen hängt stark von der Größe der Anfangsanisotropie ab. Für frühe Zeiten können sich (auch für eine Kopplungskonstante $\omega > 500$!) große Unterschiede zwischen dem Einsteinschen und dem Brans-Dicke-System erge-

ben.
Die Brans-Dicke-Feldgleichungen wurden bisher in diesem Rahmen anscheinend überhaupt noch nicht untersucht. Insbesondere die in dieser Arbeit gefundene Tatsache, daß ihre Lösungen viele Charakteristika mit den Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen teilen, z.B. den Übergang in das Friedmann-Modell (mit gewissen Einschränkungen), ist dabei ein sehr interessantes Ergebnis.
Natürlich kann das hier untersuchte System nicht als ein realistisches kosmologisches Modell dienen. Der Einfluß anderer Teilchen wurde ebensowenig betrachtet wie z.B. Viskositäts-Effekte. Die festgestellten Eigenschaften geben aber zu der Hoffnung Anlaß, daß das untersuchte System im Rahmen eines umfassenderen Modells, in dem sicherlich auch Lösungen der Boltzmann-Gleichung betrachtet werden müssen, Anwendung finden kann.

Die hier behandelten Themen werfen außerdem einige interessante Fragen auf, die abschließend formuliert werden sollen:

- Gibt es zu der Arbeit von Ehlers, Geren und Sachs analoge Resultate, mit denen man die Form der Metrik aus der Verteilungsfunktion ableiten könnte? Wäre eine solche Ableitung eindeutig, d.h. würde die Form der Verteilungsfunktion auch aus der Wahl der Metrik folgen?

- Welche exakten Lösungen der gekoppelten Einstein-Liouville-Gleichungen gibt es ? Können sie ein neues Licht auf derzeitige Probleme der Kosmologie werfen?

- Kann die Brans-Dicke-Theorie ein ebenso konsistentes Bild für das Universum liefern wie die Einsteinsche Theorie? Läßt sich aufgrund von kosmologischen Beobachtungen eine Entscheidung zwischen diesen Theorien fällen?

- Ein Resultat dieser Arbeit war die starke Abhängigkeit der Temperaturanisotropie von der Größe der Ruhemasse der Teilchen. Daher wird man zu der folgenden Spekulation geführt: Könnte man durch eine Vermessung der Neutrino-Hintergrundstrahlung Aussagen über die Ruhemasse dieser Teilchen treffen?

Dabei sollte aber nicht vergessen werden, daß sich die Kosmologie erst in jüngerer Zeit als physikalische Theorie etabliert hat und daß schon oft sicher geglaubte Erkenntnisse einem neuen Bild des Universums weichen mußten.

A. Spezielle Kapitel

A.1 Der kovariante Lagrange-Formalismus

Die Ausführungen in diesem Abschnitt entstammen [32] und [26].
In der ART ergibt sich das Wirkungsintegral I durch eine Integration über eine Raumzeitregion Ω aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$:

$$I = \int_\Omega \mathcal{L}\, dx^{0123} \ .$$

Dabei kann $\mathcal{L}$ von der Metrik und von Materiefeldern abhängen. Um einen kovarianten Ausdruck zu erhalten, muß $\mathcal{L}$ ein Produkt aus einem Skalar L und $\sqrt{-g}$ sein ($\sqrt{-g}\, dx^{0123}$ ist ein invariantes Volumenelement).
Nun soll versucht werden, die Einsteinschen Feldgleichungen aus einer möglichst einfachen Form für L durch eine Variation bzgl. der Metrik abzuleiten. Das Hamiltonsche Prinzip fordert

$$\delta I = \delta \int_\Omega L \sqrt{-g}\, dx^{0123} = 0$$

mit g_{ab} als dynamischer Variable. Die Variationen δg_{ab} und $\delta g_{ab,c}$ sollen auf dem Rand von Ω verschwinden.
Dabei liegt es nahe, L als Summe aus einem Term L_M, der die Materie spezifiziert, und einem Skalar L_g zu schreiben, der das reine Gravitationsfeld beschreibt und im Gegensatz zu L_M die ersten und zweiten Ableitungen der Metrik enthält. Dieser Annahme liegt das Prinzip der minimalen Kopplung zugrunde. Als einfachste Möglichkeit für L_g bietet sich der Ricci-Skalar R an. Somit kann man dem Variationsprinzip die Form

$$\delta \int_\Omega (\frac{1}{2} R + \kappa L_M) \sqrt{-g}\, dx^{0123} = 0$$

geben, wobei κ eine Kopplungskonstante ist und der Faktor $\frac{1}{2}$ nur aus Konventionsgründen aufgenommen wurde.
Tatsächlich liefert die etwas längliche Durchführung der Variation (z.B. [32]) die Einsteinschen Feldgleichungen

$$R^{ab} - \frac{1}{2} R\, g^{ab} = \kappa\, T^{ab} \ ,$$

wenn man

$$T^{ab} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\, L_M)}{\delta g_{ab}} = g^{ab} L_M + 2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{ab}} \tag{A.1}$$

als den Energie-Impuls-Tensor der Materie identifiziert. Dabei ist

$$\frac{\delta F}{\delta g_{ab}} := \frac{\partial F}{\partial g_{ab}} + \left(\frac{\partial F}{\partial g_{ab,c}} \right)_{;c} \ .$$

Wenn L_M neben dem Weltlinienvektorfeld u^a, das die übliche Materie spezifiziert, von einem Materiefeld φ und dessen Ableitung $\varphi_{,a}$ abhängt, liefert das Variationsprinzip außerdem die

Entwicklungsgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,a}}\right)_{;a} = 0 \tag{A.2}$$

für φ.
Ein elektromagnetisches Feld ist z.B. durch den zusätzlichen Lagrange-Dichten-Anteil

$$L_M^{(el)} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + e A_a u^a$$

gekennzeichnet, der zu dem Energie-Impuls-Tensor

$$T^{ab}_{(el)} = F^{ac} F^b{}_c - \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F^{cd}$$

und der Gleichung

$$F^{ab}{}_{;b} = e\, u^a$$

führt.

A.2 Die Brans-Dicke-Theorie

Im Jahre 1961 formulierten Brans und Dicke [4] eine Gravitationstheorie, die die Einsteinsche Theorie verallgemeinern und dem Machschen Prinzip Rechnung tragen sollte. Dises Prinzip sieht die Beschleunigung bezüglich der großräumigen Massenverteilung des Universums als Grund der Massenträgheit an[1]. Auch die Massen der Elementarteilchen müßten so Ausdruck einer Wechselwirkung mit einem „kosmischen Feld“ sein. Da man experimentell nur das Produkt aus Masse und Gravitationskonstante G messen kann, erhält man als äquivalente Schlußfolgerung, daß G nicht konstant ist, sondern von einem Skalarfeld φ abhängt, das mit der großräumigen Massenverteilung gekoppelt ist.
Die einfachste kovariante Entwicklungsgleichung für ein solches Skalarfeld ist

$$\Box\varphi := \varphi^{,a}{}_{;a} = \lambda\, \kappa\, T^a{}_a$$

mit einer dimensionslosen Kopplungskonstanten λ. Außerdem nahmen Brans und Dicke aufgrund von Größenabschätzungen das Gesetz $G = \varphi^{-1}$ an, was zu der Feldgleichung

$$G^{ab} = \frac{\kappa}{\varphi}\left(T^{ab} + T^{ab}_{\varphi}\right)$$

führt. Neben dem üblichen Materie - Energie-Impuls-Tensor T^{ab} taucht hier ein von φ abhängiger Term T^{ab}_{φ} auf.
In die Bewegungsgleichungen soll das Skalarfeld allerdings nicht eingehen, die Materie ist daher nur indirekt (über die Feldgleichungen) mit φ gekoppelt, und es gilt weiterhin

$$T^{ab}{}_{;b} = 0\ .$$

Aufgrund der Bianchi-Identität $G^{ab}{}_{;b} = 0$ muß daher $G^{ab}\varphi_{;b} = \kappa T^{ab}_{\varphi}{}_{;b}$ sein. Der allgemeinste symmetrische Tensor, der φ, $\varphi_{,a}$ und $\varphi_{,a}{}^{;b}$ in höchstens quadratischer Ordnung enthält und diese Gleichung erfüllt, ist [38]

$$T^{ab}_{\varphi} = \frac{\omega}{\kappa\varphi}\left(\varphi^{,a}\varphi^{,b} - \frac{1}{2} g^{ab}\varphi_{,c}\,\varphi^{,c}\right) + \frac{1}{\kappa\varphi}\left(\varphi^{,a;b} - g^{ab}\Box\varphi\right)$$

[1] Tatsächlich ist die Brans-Dicke-Theorie nicht mit allen Ideen des Machschen Prinzip in Übereinstimmung (z.B. [14]).

mit dem von nun an benutzten Kopplungsparameter

$$\omega := \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \, .$$

Insgesamt erhält man also das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} G^{ab} &= \frac{\kappa}{\varphi} T^{ab} + \frac{\omega}{\varphi} \left(\varphi^{,a} \varphi^{,b} - \frac{1}{2} g^{ab} \varphi_{,c} \, \varphi^{,c} \right) + \frac{1}{\varphi} \left(\varphi^{,a;b} - g^{ab} \Box \varphi \right) \\ \Box \varphi &= \frac{\kappa}{3 + 2\,\omega} T^{a}{}_{a} \, . \end{aligned}$$

Unter geeigneten Randbedingungen geht dieses System für $\omega \to \infty$ in die Einsteinsche Theorie über.
Man kann die Brans-Dicke-Theorie auch aus der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \, \frac{\varphi}{2\kappa} \left(R - \frac{\omega}{\varphi^2} \, g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} \right) + \sqrt{-g} \, L_M$$

ableiten, wobei L_M der übliche von φ unabhängige Materieterm ist.

A.3 Konsistenz mit den Raumzeit-Symmetrien

Hier soll eine Methode vorgestellt werden, wie man eine Lösung der Liouville-Gleichung konstruieren kann, die mit den Symmetrien der Raumzeit verträglich ist. Sie wurde [7] entnommen. Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben ist $y_A := \xi^a_{(A)} \, p_a$ eine mit dem Killing-Vektor $\xi^a_{(A)}$ verknüpfte Erhaltungsgröße, d.h. es gilt $\frac{d}{ds} y_A = 0$. Dabei soll A die r Killing-Vektoren der Metrik durchnummerieren. Daraus folgt, daß

$$f = f(y_1, ..., y_r)$$

eine Lösung der Liouville-Gleichung $\frac{d}{ds} f = 0$ ist.
Der entscheidende Punkt ist nun die Forderung, daß nicht nur die Metrik, sondern auch die Verteilungsfunktion f unter der (infinitesimalen) Transformation $\overline{x}^a = x^a + \epsilon \, \xi^a(x^b)$ invariant sein soll. Wegen $\overline{p}^a = \frac{d}{ds} \overline{x}^a = p^a + \epsilon \, \xi^a{}_{,b} \, p^b$ gilt aber

$$f(x^a, p^a) = f(\overline{x}^a, \overline{p}^a) + f_{,a} (-\epsilon) \, \xi^a + \frac{\partial f}{\partial p^a} (-\epsilon) \, \xi^a{}_{,b} \, p^b + \mathcal{O}(\epsilon^2) \, ,$$

so daß die Forderung $f(\overline{x}^a, \overline{p}^a) = f(x^a, p^a)$ (unter Vernachlässigung von ϵ^2-Termen) zu

$$f_{,a} \, \xi^a + \frac{\partial f}{\partial p^a} \, \xi^a{}_{,b} \, p^b = 0$$

führt. Diese Gleichung muß für jeden der r Killing-Vektoren erfüllt sein. Wie man leicht nachrechnet, liefert das Einsetzen von $f = f(y_1, ..., y_r)$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y_A} \left(\xi^a_{(A)} \xi_{(B)b,a} - \xi^a_{(B)} \xi_{(A)b,a} \right) p^b = 0 \, , \quad B = 1, ..., r \, .$$

Mit den in Abschnitt 1.3 eingeführten Strukturkonstanten K^C_{AB} gilt also

$$\frac{\partial f}{\partial y_A} \, K^C_{AB} \, y_C = 0 \, , \quad B = 1, ..., r \, .$$

Diese linearen Differentialgleichungen liefern somit eine Lösung der Liouville-Gleichung , die gleichzeitig invariant unter den Raumzeitsymmetrien ist, die durch die Killing-Vektoren beschrieben werden.

A.4 Konform äquivalente Metriken

Hier sollen zwei Metriken betrachtet werden, die konform äquivalent sind:

$$\overline{g}_{ab} = e^{2V} g_{ab} \, .$$

Offensichtlich ist

$$\overline{g}^{\,ab} = e^{-2V} g^{ab} \, .$$

Die zu $\overline{g}_{ab}$ gehörenden Krümmungsgrößen lassen sich nun mit den zu g_{ab} gehörenden in Beziehung setzen. Die entsprechenden Rechnungen sind elementar und werden hier daher nicht vorgeführt. Die Beziehungen lauten

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{\,c}_{ab} &= \Gamma^c_{ab} + \delta^c_a \, V_{,b} + \delta^c_b \, V_{,a} - g_{ab} \, g^{cd} V_{,d} \\
\overline{R}_{ab} &= R_{ab} + 2 \, (V_{,a,b} - V_{,a} V_{,b}) + g_{ab} \, (g^{cd} V_{,c,d} + 2 \, g^{cd} V_{,c} V_{,d}) \\
\overline{G}_{ab} &= G_{ab} + 2 \, (V_{,a,b} - V_{,a} V_{,b}) - g_{ab} \, (2 \, g^{cd} V_{,c,d} + g^{cd} V_{,c} V_{,d}) \, .
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse lassen sich z.B. auch in [9] nachlesen.

Interessant ist nun, welche Beziehungen zwischen den Eigenschaften eines Weltlinien-Vektorfeldes u^a bezüglich $\overline{g}_{ab}$ bzw. g_{ab} existieren. Dazu muß man den Ausdruck $\overline{u}_{a\bar{;}b}$ auswerten, wobei hier die kovariante Ableitung bzgl. $\overline{g}_{ab}$ gemeint sein soll und $\overline{u}_a = e^V u_a$ ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{a\bar{;}b} &= (e^V u_a)_{\bar{;}b} \\
&= e^V \, (V_{,b} u_a + u_{a;b} - \overline{\Gamma}^{\,c}_{ab} u_c) \\
&= e^V \, (u_{a;b} - V_{,a} u_b + g_{ab} V_{,c} u^c) \, .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich das folgende Lemma leicht beweisen:

Lemma 1 : Wenn für ein Weltlinien-Vektorfeld u^a einer Metrik g_{ab} die Beziehungen $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0$ und $\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta \, u_a = U_{,a}$ gelten, dann besitzt die (zu g_{ab} konform äquivalente) Metrik $\overline{g}_{ab} = e^{-2U} g_{ab}$ ein bezüglich $\overline{g}_{ab}$ kovariant konstantes Vektorfeld $\overline{u}_a$, d.h. $\overline{u}_{a\bar{;}b} = 0$.

Beweis : Zunächst stellt man fest, daß $\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta \, u_a = U_{,a}$ durch Überschieben mit u^a die Gleichung $\frac{1}{3}\theta = U_{,a} u^a$ impliziert. Setzt man dann die im Lemma gemachten Voraussetzungen in den obigen Ausdruck für $\overline{u}_{a\bar{;}b}$ ein, ergibt sich (durch Ersetzung von V durch $-U$)

$$\begin{aligned}
\overline{u}_{a\bar{;}b} &= e^{-U} \, (-(\frac{1}{3}\theta \, u_a + U_{,a}) \, u_b + \frac{1}{3}\theta \, h_{ab} + U_{,a} u_b - g_{ab} \, U_{,c} \, u^c) \\
&= e^{-U} \, (\frac{1}{3}\theta - U_{,c} \, u^c) \, g_{ab} \\
&= 0 \, .
\end{aligned}$$

Die Nützlichkeit dieser Beziehung wird im folgenden Lemma deutlich:

Lemma 2 : Eine Metrik, die ein kovariant konstantes Vektorfeld zuläßt, läßt sich in der Form

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha) \, dx^\mu dx^\nu$$

schreiben.

Der Beweis ist z.B. bei [32] nachzulesen. Hier sei nur soviel gesagt, daß die Hyperflächenorthogonalität ($\omega_{ab} = 0$) gerade das Verschwinden der $g_{0\mu}$-Terme garantiert, während man wegen der Geodizität ($\dot{u}_a = 0$) $g_{00} = -1$ setzen kann. Das Verschwinden von σ_{ab} und θ liefert dann $\frac{\partial}{\partial x^0}\gamma_{\mu\nu} = 0$.
Der Ricci-Tensor einer solchen Metrik hat die Form

$$R_{00} = R_{0\mu} = 0 \quad , \quad R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} \, ,$$

wobei $\tilde{R}_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor bezüglich $\gamma_{\mu\nu}$ ist.
Nimmt man beide Lemmas zusammen, erhält man schließlich

Lemma 3 : Eine Metrik, die ein Vektorfeld u^a mit $\sigma_{ab} = \omega_{ab} = 0$ und $\dot{u}_a - \frac{1}{3}\theta\, u_a = U_{,a}$ zuläßt, läßt sich in der Form

$$ds^2 = e^{2U}(-dt^2 + \gamma_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu dx^\nu)$$

schreiben.

B. Die Implementation des numerischen Verfahrens

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, wie die numerische Lösung der Feldgleichungen auf dem Computer bewerkstelligt wurde. Die Aufgabe bestand darin, ein System von N Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(y_1, ..., y_N) \\ &\vdots \\ y_N' &= F_N(y_1, ..., y_N) \end{aligned}$$

ausgehend von den Anfangsbedingung

$$y_1(t_0) = y_1^{(0)} \quad , \quad \dots \quad , \quad y_N(t_0) = y_N^{(0)}$$

zu einer Zeit t_0 bis zu einer Zeit $t_E > t_0$ numerisch zu lösen. Dieses wird als Anfangswertproblem bezeichnet. Dabei sollen die unabhängigen Variablen, aber auch verschiedene Größen, die diese und ihre Ableitungen enthalten (z.B. Hubbleparameter, Anisotropie usw.), über den gesamten Bereich von t_0 bis t_E graphisch dargestellt werden. Außerdem gibt es eine Reihe von Parametern, zu denen auch ein Teil der Anfangsbedingungen zählt, deren Einfluß auf die Lösungen möglichst systematisch untersucht und dargestellt werden soll.
Diese Anforderungen werden am besten durch ein (noch zu besprechendes) sebstgeschriebenes Computerprogramm gelöst, das für die eigentliche numerische Lösung Hilfsroutinen aufruft, die in verschiedenen Varianten in großen Programmbibliotheken zur Verfügung stehen. Die darin benutzten numerischen Verfahren haben sich in der Praxis bewährt und werden vor allem bezüglich ihrer Zeiteffizienz laufend aktualisiert und verbessert.
In dieser Arbeit werden Routinen der NAG (Numerical Algorithms Group) - Bibliothek benutzt, die in FORTRAN geschrieben wurde. Diese Bibliothek ist sehr umfangreich und es liegen viele Erfahrungen darüber vor. Für die numerische Lösung von Differentialgleichungen stellt sie drei verschiedene Verfahren zur Verfügung.
Das Gear-Mehrschritt-Verfahren ist speziell für „steife“ Differentialgleichungen konzipiert, in denen kleine Rundungsfehler zu großen Fehlern führen können. Sie ist daher ziemlich langsam. Zum Glück gehören keine der hier betrachten Differentialgleichungssysteme zu dieser Kategorie, wie man auch mit Hilfe einer speziellen NAG-Routine testen kann. Das Runge-Kutta-Merson-Verfahren eignet sich vor allem für einfach auszuwertende Systeme, bei denen keine hohe Genauigkeit verlangt wird. Mit den in dieser Arbeit benutzten Differentialgleichungen kommen sie aber nicht zurecht, da die Variablen über viele Größenbereiche variieren und eine hohe Genauigkeit erfordern. Mit dem Adams-Mehrschrittverfahren konnten aber alle hier untersuchten Systeme problemlos gelöst werden[1]. Der globale Fehler war vernachlässigbar klein (näheres zur Fehlerbehandlung in Abschnitt 9.4 und 10.5).

[1] Auf einer HP 9000 (700 - Serie) dauerte ein Simulationslauf einige Sekunden bis ca. 1 Minute.

Die mathematische Grundlage des Adams-Mehrschrittverfahrens soll hier nicht besprochen werden, sie kann an vielen Stellen nachgelesen werden (z.B. [13], [10], [11]). Für die Durchführung der numerischen Simulation mit Hilfe der NAG-Routinen war ihre Kenntnis nicht nötig, was im Grunde nur die immer besser werdende Versorgung mit Hilfsprogrammen wiederspiegelt[2].
Um die graphische Darstellung der Lösungen möglicht flexibel zu halten, wurden die Werte der interessierenden Größen in einem bestimmten zeitlichen Abstand mitsamt den Zeitpunkten, an denen sie ausgewertet wurden, in Dateien geschrieben. Später konnten sie dann mit dem Plotprogramm Gnuplot dargestellt werden.
Das selbstgeschriebene Programm wurde in der Programmiersprache C geschrieben, da C eine modernere und flexiblere Sprache als FORTRAN ist, und weil ich selber mit C viel mehr Übung und Erfahrungen hatte. Der Aufruf der in FORTRAN geschriebenen NAG-Routinen funktionierte bis auf einige implementationsspezifische Details[3] reibungslos.
Die Aufgabe des selbstgeschriebenen Programms besteht darin, die für die numerische Lösung der Differentialgleichungen notwendigen Parameter bereitzustellen, die eigentliche Berechnung mit Hilfe der NAG-Routinen durchzuführen und die Übertragung der berechneten Werte in Dateien zu organisieren. Dabei sollen viele dieser Parameter während der Ausführung des Programms veränderbar sein, da es natürlich viel zu umständlich und langwierig wäre, jedesmal das Programm neu zu compilieren.
Wie in früheren Kapiteln besprochen sind folgende Größen fest: Der Zeitpunkt $t_0 = 2\,s$, an dem die Berechnung starten soll, der Zahlenwert von ρ_0 (siehe Abschnitt 8.3) sowie die Anfangsbedingungen $A(t_0) = 1$ und $B(t_0) = 1$. Der Endzeitpunkt $t_E = 10^{22}\,s$ steht zwar eigentlich auch fest, für die flexible Steuerung der Ausgabe ist es aber oft sinnvoll, die Berechnung in Etappen durchzuführen, so daß t_E frei veränderbar gewählt wurde.
Eine entscheidende Bedeutung haben die Größen, deren Einfluß auf den Zeitverlauf der Lösungen systematisch untersucht werden soll. Neben der durch $k'(t_0)$ festgelegten Anfangsanisotropie sind dieses die Masse m (für $m \neq 0$) und für das Brans-Dicke-System die Anfangsbedingungen $\varphi(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ und der Kopplungsparameter w.
Für die Steuerung der Ausgabe muß die Möglichkeit bestehen, einen Dateinamen zu wählen und sich zwischen der Ausgabe auf den Bildschirm und in die Datei entscheiden zu können. Außerdem ist die Anzahl der auszugebenden Datenpunkte bis zum Zeitpunkt t_E in dem Programm frei wählbar. Für die letzendlich in dieser Arbeit verwendeten Dateien wurde dabei die folgende Wahl getroffen, die sich aus der Tatsache begründet, daß viele Größen in den ersten $0.01 - 0.1\,s$ die größte Variation haben: Von $2.0\,s$ bis $2.01\,s$ werden 100 Datenpunkte ausgegeben, von $2.01\,s$ bis $2.1\,s$ ebenfalls 100 und von $2.1\,s$ bis $10^{22}\,s$ sind es 400.

Die hier verwendete NAG-Routine D02CBF erfordert eine Reihe von Übergabeparametern, wie man an der folgenden Deklarationssyntax sehen kann. Dabei werden Variablenfelder durch eckige Klammern gekennzeichnet und Funktionen durch runde. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird dabei hier und im folgenden nicht zwischen Variablen und Variablenadressen unterschieden.

void D02CBF(double *t_anfang*, double *t_ende*, long *dimen*, double *var* [],
double *eps*, long *eps_modus*, void *Ableitung* (),
void *Output* (), double *a_feld* [], long *eps_status*)

Neben den Berechnungsgrenzen *t_anfang* und *t_ende*, der Dimension des Differentialgleichungssystems *dimen* und dem Feld *var*[] mit der Dimension *dimen*, in dem die Werte der freien Variablen stehen, werden zwei Parameter *eps* und *eps_modus* zur Steuerung der Rechengenauigkeit, ein Arbeitsfeld *a_feld* (das keine besondere Bedeutung hat), ein Fehlerstatus *eps_status* und zwei selbstzuschreibende Funktionen *Ableitung*() und *Output*() benötigt.

[2] Eine Beziehung zwischen lokalem und globalem Fehler läßt sich für dieses wie für fast alle numerische Verfahren nicht aufstellen.

[3] So muß man z.B. an die NAG-Routinen statt der Variablen ihre Adressen übergeben und diese statt mit D02CBF(...) mit d02cbf_(...) aufrufen.

Die Größe *eps* repräsentiert den maximal zulässigen Fehler, der bei einem Integrationsschritt erlaubt ist, genauer gesagt den relativen Fehler für *eps_modus* = 0 und den absoluten für *eps_modus* = 1. Bei *eps_modus* = 2 wird sowohl der relative als auch der absolute Fehler berücksichtigt. Die Beziehung zu dem letztendlich resultierenden globalen Fehler, der natürlich i.a. viel größer als *eps* ist, kann dabei nur durch Probeläufe erkundet werden. Bei den hier vorliegenden Systemen erwies sich die Wahl *eps_modus* = 0 als die beste, der optimale Wert von *eps* hängt aber z.B. von der Größe der Masse ab und ist daher frei veränderbar. Der Parameter *eps_status* legt fest, wie die NAG-Routine auf einen Fehler im Ablauf reagieren soll und erhält dann den entsprechenden Fehlercode, was hier aber nicht aufgeschlüsselt werden soll.

Das eigentliche Differentialgleichungssystem ist in der Funktion *Ableitung*() spezifiziert. Sie wird von der NAG-Routine während der gesamten Berechnung (in einem von *eps* abhängigen Abstand) aufgerufen. Diese Routine liefert nämlich für den übergebenen Zeitpunkt t und den in *var*[] stehenden aktuellen Werten der unabhängigen Variablen die Ableitung dieser Variablen und schreibt sie in das ebenfalls übergebene Feld *abl*[] . Für die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen hat sie z.B. mit der Zuordnung *var* [0]= A, *var* [1]= B und *var* [2]= B' die Form

```
void Ableitung ( double t, double var[] , double abl[] )
{
    abl [0]  =  1.5 * var [0] * var [2] / var [1] + ... ;
    abl [1]  =  var [2] ;
    abl [2]  =  -0.5 * var [2] * var [2] / var [1] + ... ;
}
```

Trotz dieser einfachen grundlegenden Struktur ist diese Routine aber für die hier betrachteten Systeme in der tatsächlichen Implementation aus zwei Gründen weitaus länger und komplizierter. Zum einen ist die (oben nicht aufgeführte) Berechnung der Energie-Impuls-Tensor - Komponenten T^{00} und T^1_1 für den Fall $m \neq 0$ sehr aufwendig. Dazu müssen nämlich die Integrale (8.3) und (8.4) numerisch gelöst werden, was mit Hilfe der NAG-Routine D01AMF gelang. Zu der Steuerung der Genauigkeit benötigt man daher neben *eps* (siehe oben) einen zweiten Parameter *int_eps*. Die Verwendung dieser Routine ist aber ganz analog zu der von D02CBF und wird hier nicht näher erläutert.
Zum anderen kann es zu Bereichsüberschreitungen mathematischer Funktionen oder zu Divisionen durch 0 kommen. Der zweite Fall tritt z.B. bei der Berechnung von T^{00} auf, wenn der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{|k^2-1|}} \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arcosh} k \\ \arccos k \end{array} \right\}$ für $k = 1$ ausgewertet werden soll (der Grenzwert ist 1). Der Computer berechnet nämlich die Faktoren getrennt voneinander und versucht dann, 0 durch 0 zu teilen. Wegen der immer vorhandenen Rundungsfehler kann dieser Effekt auch für $k \approx 1$ zu Fehlern führen, ohne daß das Programm einen Fehler meldet oder diesen gar spezifiziert oder lokalisiert.
Aus diesem Grund wurden die Näherungsformeln aus Abschnitt 8.3 für die Berechnung von T^{00} und T^{11} benutzt, wenn k im Intervall $[1 - 10^{-7}, 1 + 10^{-7}]$ war. Die dadurch eingeführte zusätzliche Rechenungenauigkeit (d.h. die Vernachlässigung von $(k-1)^2$ - Termen für diesen Fall) ist dabei völlig vernachlässigbar.

Die Funktion *Output*() dient der Ausgabe der interessierenden Größen im Verlauf der Rechnung. Dazu wird der jeweilige Zeitpunkt t und das Feld der freien Variablen *var*[] übergeben. Durch den Parameter t kann man außerdem festlegen, in welchem Abstand die Funktion von D02CBF aufgerufen wird. Der Wert von t nach Beendigung der Funktion entspricht nämlich dem Zeitpunkt, an dem *Output*() erneut aufgerufen wird. Die einfachste Möglichkeit besteht daher darin, t in der Funktion mit Hilfe einer globalen Variablen um einen kleinen Wert zu erhöhen. Da die hier betrachteten Größen in der graphischen Darstellung über den Logarithmus der Zeit

aufgetragen wurden, wird t in *Output*() mit einer globalen Variablen *schritt* multipliziert, die so gewählt war, daß die gewünschte Anzahl von Datenpunkten resultierte. Eine andere globale Variable *output_modus* legt das Ziel der Ausgabe (Bildschirm oder Datei) fest. Die Funktion hat somit die folgende Gestalt:

```
void Output ( double t, double var[] )
{
  if ( output_modus )
    Monitor_out ( t, var[] ) ;
  else
    Datei_out ( t, var[] ) ;

  t = t * schritt ;
}
```

Die Funktionen *Monitor_out*() und *Datei_out*() haben die Aufgabe, alle interessierenden Größen, die von dem jeweiligen Zeitpunkt, den freien Variablen und den Ableitungen dieser Variablen abhängen können[4], auf dem Bildschirm auszugeben bzw. in eine Datei zu schreiben. Diese muß vorher geöffnet und durch globale Variablen spezifiziert sein. Sie haben dabei mit den gleichen Schwierigkeiten zu kämpfen wie die Funktion *Ableitung*(), da die Berechnung mancher Größen eine numerische Integration erfordert und viele Fallunterscheidungen zu treffen sind.

Um einen Eindruck von den interaktiven Eingabemöglichkeiten zu vermitteln, ist untenstehend das Menü abgebildet, das beim Start des C-Programms erscheint und das die Steuerung der Parametergrößen erleichtern soll. Dabei steht in den spitzen Klammern der zur Auswahl des Menüpunkts einzugebende Buchstabe und in der runden der aktuelle Wert der jeweiligen Größe.

Anfangswert A'/B'	:	< a >	(1)
Anfangswert B'	:	< b >	(8.64262)
Anfangswert k'	:	< c >	(0)
Phi-Werte	:	< p >	(10/10)
Kopplungskonst.	:	< k >	(500)
Masse	:	< m >	(10eV)
Endpunkt	:	< e >	(2/1e+22)
Genauigkeit	:	< g >	(1e-10)
I-Genauigkeit	:	< x >	(1e-8)
I-Fehlermodus	:	< Y >	(relativ)
I-Speichergroesse	:	< z >	(800)
Ausgabeintervall	:	< i >	(10)
Outputmodus	:	< O >	(Monitor)
Datei	:	< d >	(−)
Anfangswerte	:	< A >	
Uebernehmen	:	< U >	
Start	:	< S >	
Ende	:	< E >	

Bei den durch kleine Buchstaben bezeichneten Menüeinträgen werden weitere Eingaben erwartet, im einfachsten Fall die Eingabe eines neuen Wertes für die entsprechende Größe. Welche Aktionen die anderen Menüpunkte beinhalten, wird bei der Skizzierung des Hauptprogramms deutlich werden. Die Möglichkeit, $B'(t_0)$ und $\frac{A'}{B'}(t_0)$ ändern zu können, wurde vor allem aus

[4] Die Ableitungen lassen sich durch einen Aufruf der Funktion *Ableitung* () gewinnen.

Testzwecken aufgenommen. Die durch x, Y und z spezifizierten Größen steuern die numerische Integration für die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors.

Das Hauptprogramm hat damit die folgende schematische Gestalt, wobei die in spitzen Klammern eingeschlossenen Anweisungen leicht zu implementierende Befehlsfolgen repräsentieren und die einzelnen Menüpunkte zur Werteänderung nicht noch einmal aufgeschlüsselt wurden:

```
< Deklaration und Initialisierung der benannten Konstanten >
< Deklaration der globalen Variablen und Routinen >
int main ( void)
{
  < Initialisieren der globalen Variablen (mit benannten Konstanten) >
  while (1)
  {
    < Menü anzeigen, auf Eingabe warten >
     case  ...  :  < Wertänderung speichern, ggf. globale Variablen verändern >
           i    :  < Eingabe in Variable temp speichern >
                   schritt = (t_anfang / t_ende)^(1/temp)
           O    :  output_modus = 1 − output_modus
           d    :  < Dateiname speichern, globale Dateivariablen initialisieren >
                   < Datei öffnen >
           A    :  < aktuelle Daten durch Anfangsdaten ersetzen >
           U    :  < aktuelle Daten durch Altdaten ersetzen >
           S    :  < Daten in Altdaten schreiben >
                   Aufruf von D02CBF
                   < ggf. Fehlerstatus anzeigen >
                   < Daten und Altdaten vertauschen >
           E    :  exit
  }
}
```

Literaturverzeichnis

[1] Berezdivin, R. and Sachs, R.K. (1970). *A Lemma on the Einstein-Liouville Equations.* In Carmeli, M.; Fickler, S.J.; Witten,L. (ed.) (1970) *Relativity.* – New York: Plenum

[2] Berezdivin, R. and Sachs, R.K. (1973). *Matter Symmetries in General Relativistic Kinetic Theory.* J. Math. Ph. **14**, 1254

[3] Börner, G. (1988) *The Early Universe.* – Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag

[4] Brans. C. and Dicke, R.H. (1961). *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation.* Phys. Rev. **124**, 925

[5] Doroshkevich, A.G.; Zel'dovich, Ya.B.; Novikov, I.D. (1968). *Kinetic Theorie of Neutrinos in Anisotropic Cosmological Models.* Soviet Phys. JETP **26**, 408

[6] Caderni, N. and Fabbri, R. (1978). *Production of Entropy and Viscous Damping of Anisotropy in Homogenous Cosmological Models: Bianchi Type I Spaces.* Il Nuovo Cimento **44B**, 228

[7] Ehlers, J. (1971). *General Relativity and Kinetic Theorie.* In Sachs, R.K. (ed.) (1971) *General Relativity and Cosmology.* – New York: Academic Press

[8] Ehlers, J.; Geren, P.; Sachs, R.K. (1968). *Isotropic Solutions of the Einstein-Liouville-Equations.* J. Math. Ph. **9**, 1344

[9] Eisenhart, L.Ph. (1949). *Riemannian Geometry.* – Princeton: Princeton University Press

[10] Gladwell, I. (1979). *Initial Value Routines in the NAG Library.* ACM Trans. Math. Software **5**, 386

[11] Gladwell, I. and Sayer, D.K. (ed.) (1980). *Computational Techniques for Ordinary Differential Equations.* – London: Academic Press

[12] Goenner, H.F.M. and Kowalewski, F. (1989). *Exact Anisotropic Viscous Fluid Solutions of Einstein's Equation.* Gen. Rel. Grav. **21**, 467

[13] Hall, G. and Watts, J.M. (ed.) (1976). *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.* – Oxford: Oxford University Press

[14] O'Hanlon, J. and Tupper, B.O.J. (1972). *Vacuum-Field Solutions in the Brans Dicke Theorie.* Il Nuovo Cimento **7B**, 305

[15] Jacobs, K. (1970). Ph.D. Thesis, University of California

[16] Kamke, E. (1944) *Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen, 3.Aufl..* – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft

[17] Kramer, D.; Stephani, H,; MacCallum, M.; Herlt, E. (1980). *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* – Berlin/Cambridge: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften / Cambridge University Press

[18] Lindquist, R. (1966). *Relativistic Transport Theory.* Ann. Ph. **37**, 487

[19] Lovelock, D. (1972). *The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor.* J. Math. Ph. **13**, 874

[20] MacCallum, M.A.H.; Stewart, J.M.; Schmidt, B.G. (1970). *Anisotropic Stresses in Homogenous Cosmologies.* Comm. Math. Ph. **17**, 343

[21] Matravers, D.R. and Ellis, G.F.R. (1989). *Evolution of Anisotropies in Friedmann Cosmologies.* Classical and Quantum Gravity **6**, 369

[22] Matzner, R.A. and Misner, C.W. (1972). *Dissipative Effects in the Expansion of the Universe I.* Ap. J. **171**, 415

[23] Matzner, R.A. (1972). *Dissipative Effects in the Expansion of the Universe II.* Ap. J. **171**, 433

[24] Misner, C.W. (1968). *The Isotropy of the Universe.* Ap. J. **151**, 431

[25] Neugebauer, G. (1980). *Relativistische Thermodynamik.* – Berlin: Akademie-Verlag

[26] Papapetrou, A. (1974). *Lectures on General Relativity.* – Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.

[27] Peebles, P.J.E. (1971). *Physical Cosmology.* – Princeton: Princeton University Press

[28] Petrow, A.S. (1964). *Einstein - Räume.* – Berlin: Akademie-Verlag

[29] Ray, J.R. and Zimmerman, J.C. (1977). *General-Relativistic Kinetic Theory of the Robertson - Walker and Petrov G_4 VIII Cosmologies.* Il Nuovo Cimento **42B**, 183

[30] Romano, V. and Pavón, D. (1993). *Causal Dissipative Bianchi Cosmology.* Phys. Rev. **D47**, 1396

[31] Ryan Jr, M.P. and Shepley, L.C. (1975). *Homogenous Relativistic Cosmologies.* – Princeton/New Jersey: Princeton University Press

[32] Stephani, H. (1991). *Allgemeine Ralativitätstheorie, 4.Aufl..* – Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften

[33] Stewart, J.M. (1968). *Neutrino Viscosity in Cosmological Models.* Ap. Letters **2**, 133

[34] Stewart, J.M. (1969). *Non-Equilibrium Processes in the Early Universe.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **145**, 347

[35] Tauber, G.E. and Weinberg, J.W. (1961). *Internal State of a Gravitating Gas.* Phys. Rev. **122**, 1342

[36] Treciokas, R. and Ellis, G.F.R. (1971). *Isotropic Solutions of the Einstein-Boltzmann-Equations.* Comm. Math. Ph. **23**, 1

[37] Wald, R.M. (1984). *General Relativity.* – Chicago: University of Chicago Press

[38] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology.* – New York: John Wiley & Sons

[39] Xing, H. and You-lin, W. (1993). *A Comment on the Brans-Dicke Cosmology for a Radiation Universe.* Gen. Rel. Grav. **25**, 25